

## 6. Bewegung im Zentralfeld



### 6.2. Reduktion zum Einteilchen-Problem

$$\begin{aligned} (1) \quad m_1 \ddot{\underline{r}}_1 &= -\underline{\nabla}_1 U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) \\ (2) \quad m_2 \ddot{\underline{r}}_2 &= -\underline{\nabla}_2 U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Schwerpt. Koord.  $\underline{R} = \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{m_1 + m_2}$  (6.3)

Rel. Koord.  $\underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$

$$(1) + (2) \rightarrow \underbrace{\mu}_{m_1 + m_2} \ddot{\underline{R}} = \underline{0} \rightarrow \underline{R} = \underline{a}t + \underline{b}$$

Relativbewegung

$$\text{in (6.2)} \quad \frac{1}{m_1} (1) - \frac{1}{m_2} (2) \rightarrow \underbrace{\ddot{\underline{r}}_1 - \ddot{\underline{r}}_2}_{\ddot{\underline{r}}} = -\frac{1}{m_1} \underbrace{\underline{\nabla}_1 U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)}_{\underline{\nabla}_r U(|\underline{r}|)} + \frac{1}{m_2} \underbrace{\underline{\nabla}_2 U(|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|)}_{-\underline{\nabla}_r U(|\underline{r}|)}$$

$\underline{\nabla}$

$$= -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \underline{\nabla} U(r)$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} \mu \ddot{\underline{r}} &= -\underline{\nabla} U(r) & (6.6) \\ \mu &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dots & \text{reduzierte Masse} \\ & & (6.7) \end{aligned}}$$

... effektives Teilchen im Zentralpotential

( $\rightarrow$  konservatives Kraftfeld)

$\rightarrow$  Energieerhaltung [Kap. 2.4]

$\rightarrow$  Drehimpulserhaltung [Kap. 2.3]

4 Konstanten der Bewegung

Bsp:  $m_1 = m_p \ll m_2 = m_s \rightarrow \mu \approx \frac{m_p m_s}{m_s} = m_p!$

### 6.3 Lösung des Einteilchen-Problems

a) Auswertung der Erhaltungssätze:

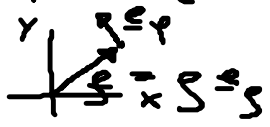
• Drehimpuls:  $\underline{r} \times (\underline{6.6}) \rightarrow \underline{r} \times \mu \ddot{\underline{r}} = \frac{d}{dt} \underbrace{(\underline{r} \times \mu \dot{\underline{r}})}_{\underline{L}} - \underbrace{\dot{\underline{r}} \times \mu \dot{\underline{r}}}_{=0}$   
 [vgl. Kap. 2.3]

$$= -\underline{r} \times \underbrace{\nabla U(r)}_{\sim \underline{e}_r \parallel \underline{r}} = 0!$$

$$\rightarrow \underline{L} = \underline{r} \times \mu \dot{\underline{r}} = \text{konst.} = L \underline{e}_z \quad (6.8)$$

o.B.d.A

$\underline{r}, \dot{\underline{r}} \perp \underline{e}_z \rightarrow$  Bewegung in  $xy$ -Ebene:  $\underline{r} = \varrho = \varrho \underline{e}_\varrho \dots$  Zylinder-  
 koord. mit  $z=0$



$$\rightarrow \dot{\underline{r}} = (\dot{\varrho} \underline{e}_\varrho) \stackrel{(A.4)}{=} \dot{\varrho} \underline{e}_\varrho + \varrho \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi \stackrel{(6.3)}{=} \dot{\varrho} \underline{e}_\varrho + \varrho \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi \quad (6.9)$$

$$\rightarrow \underline{L} = \underline{\varrho} \times \mu \dot{\underline{\varrho}} \stackrel{(6.9)}{=} \mu \varrho \dot{\varphi} \underbrace{\underline{\varrho} \times \underline{e}_\varphi}_{\varrho \underline{e}_z}$$

$$\rightarrow \underline{L} = L \underline{e}_z \text{ mit } L = \mu \varrho^2 \dot{\varphi} \quad (6.10)$$

• Energie:  $\dot{\underline{r}} \cdot (\underline{6.6}) \xrightarrow{\text{Kap. 2.4}} \frac{\mu}{2} \dot{\underline{r}}^2 + U(r) = E \quad (6.11)$

$$\text{mit } \dot{\underline{r}}^2 \stackrel{(6.9)}{=} \dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \dot{\varphi}^2 \stackrel{(6.10)}{=} \dot{\varrho}^2 + \frac{L^2}{\mu^2 \varrho^2}$$

$$(6.11) \rightarrow \boxed{\frac{\mu}{2} \dot{\varrho}^2 + \frac{L^2}{2\mu\varrho^2} + U(\varrho) = E} \quad (6.12)$$

kinet. Energie: radial axial

→ Umdeutung  
 1-dim.-Bewegung  
 mit Koord  $\rho$  in  
 $U_{\text{eff}}(\rho)$

$$\frac{\mu}{2} \dot{\rho}^2 + U_{\text{eff}}(\rho) = E \quad (6.13)$$

$$U_{\text{eff}}(\rho) = U(\rho) + \frac{L^2}{2\mu\rho^2}$$

„Zentrifugalpotential“:  
 abstoßend,  $\rightarrow \infty, \rho \rightarrow 0$

Bewgl. zu (6.13)

$$\frac{d}{dt} (6.13) / \dot{\rho}$$

$$\mu \ddot{\rho} = - \frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial \rho} = \frac{L^2}{\mu \rho^3} - \frac{\partial U}{\partial \rho} \quad (6.14)$$

„Zentrifugalkraft“  
 = Scheinkraft, treibt Körper  
 weg vom Zentrum (vgl. Karussell)

b) Lösung

• folgt aus (6.10)  $\rightarrow \dot{\varphi} = \frac{L}{\mu \rho^2} \quad (6.15)$

(6.13)  $\rightarrow \dot{\rho} = \sqrt{\frac{2}{\mu} [E - U_{\text{eff}}(\rho)]} \quad (6.16)$

• Integration von (6.16):  $\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt}$  & Sep. der Variablen

$$t - t_0 = \int_{\rho_0 = \rho(t_0)}^{\rho} \frac{d\rho'}{\sqrt{\frac{2}{\mu} [E - U_{\text{eff}}(\rho')]} \rightarrow \rho(t) \quad (6.17)$$

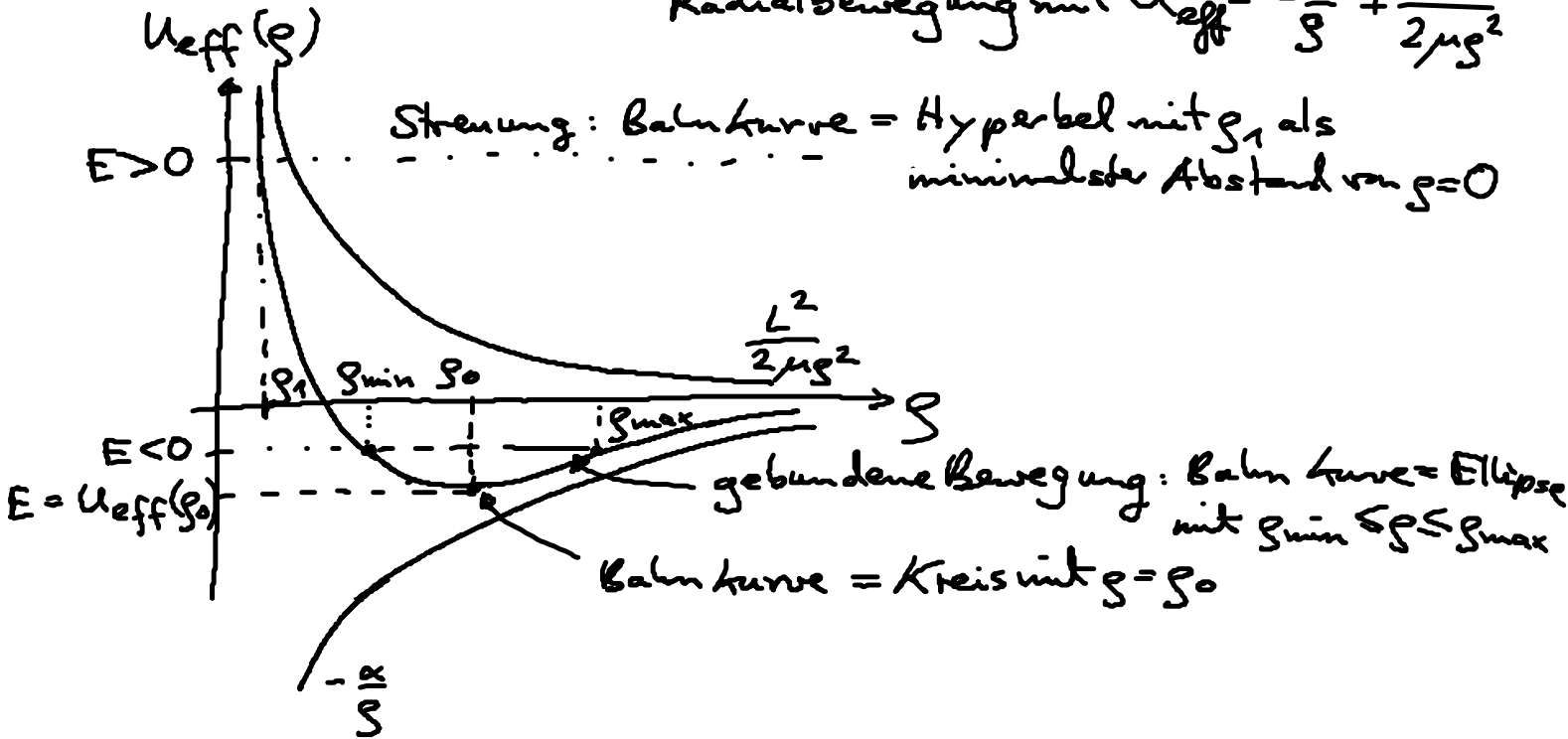
$\rho(t)$  in (6.15)  $\rightarrow \varphi(t)$

• Gestalt der Bahnkurve:  $\left. \begin{matrix} \varphi(t) \\ \rho(t) \end{matrix} \right\} \rightarrow \varphi = \varphi(\rho)$  (6.18)

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dt}{d\rho} = \frac{(6.15)}{(6.16)} \xrightarrow{\text{Integration}} d\varphi = \dots d\rho$$

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{L/\rho'^2}{\sqrt{2\mu[E - U_{\text{eff}}(\rho)]}} d\rho' \rightarrow \varphi(\rho)$$

c) Qualitative Diskussion: für Kepler problem [s. Kap. 6.4]  
 Radialbewegung mit  $U_{\text{eff}} = -\frac{\alpha}{\rho} + \frac{L^2}{2\mu\rho^2}$



### 6.4. Kepler problem

• Potential:  $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ ,  $\alpha = \begin{cases} \mu m_1 m_2 \dots \text{ Grav. potential} \\ -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \dots \text{ Coulomb potential} \end{cases}$

$\alpha > 0$  ... anziehendes Pot.  
 $\alpha < 0$  ... abstoßendes Pot.)

a) Lösung und Diskussion

• Bahnkurve: (6.18),  $\varphi_0 = 0 \rightarrow \varphi = \int \frac{L/\rho^2}{\sqrt{2\mu[E + \frac{\alpha}{s} - \frac{L^2}{2\mu s^2}]} ds$   
 $- U_{eff}(s)$

Stammfkt:

$$\left. \begin{aligned} u = \frac{1}{s}, \quad du = -\frac{ds}{s^2} \\ a = \frac{2\mu E}{L^2}, \quad b = \frac{\mu\alpha}{L^2} \end{aligned} \right\} \varphi = - \int \frac{du}{\sqrt{a+2bu-u^2}} \stackrel{o.B.}{=} \arccos \frac{b-u}{\sqrt{b^2+a}} + \pi$$

$$\Rightarrow \varphi - \pi = \arccos \left[ \frac{\frac{\mu\alpha}{L^2} - \frac{1}{s}}{\sqrt{\frac{\mu^2\alpha^2}{L^4} + \frac{2\mu E}{L^2}}} \right] \quad (6.19)$$

• Führe ein:

(6.20)

$$\left. \begin{aligned} \text{Parameter: } \rho = \frac{L^2}{\mu\alpha} \\ \text{Exzentrizität: } \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}} \end{aligned} \right\}$$

(6.19)

$$\left\{ \begin{aligned} s = \frac{\rho}{1 + \varepsilon \cos\varphi} \end{aligned} \right. \quad (6.21)$$

... "Kegelschnitt" in Polar koord.

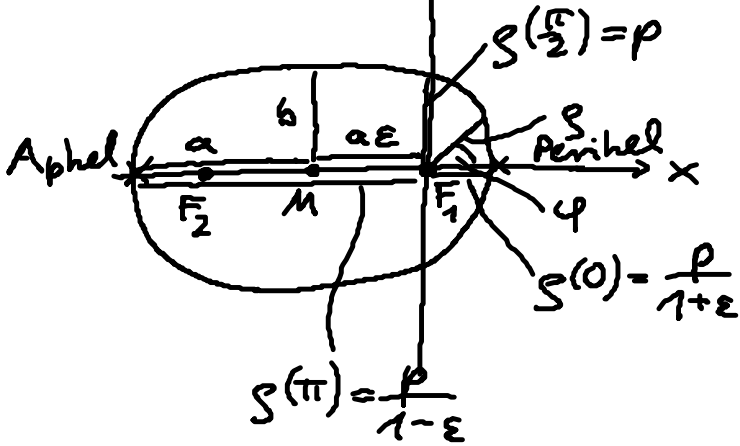
• mögliche Bahnkurven:

(1)  $\varepsilon = 0, E = -\frac{\mu\alpha^2}{2L^2}$  ... Kreis:  $s = \rho$

(2)  $\varepsilon < 1, E < 0$  ... Ellipse

Kartes. Koord. mit  $s = \sqrt{x^2+y^2}$   
 $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$  } (6.21) o.B.

$$\left. \begin{aligned} \frac{(x+a\varepsilon)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \text{Halbachsen: } a = \frac{\rho}{1-\varepsilon^2} \\ b = \frac{\rho}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$



$F_1$  ... Brennpkte

$F_2$  ... Sonne

$M$  ... Mittelpkte

$$ae = |MF_1| \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0$$

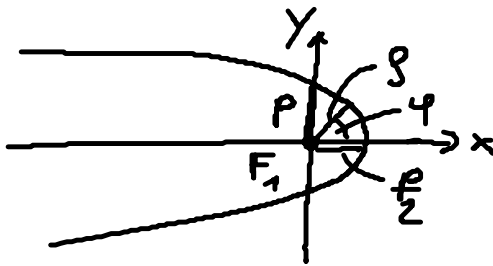
$\epsilon$  bestimmt Abweidg vom Kreis  $\hat{=}$  Exzentrizität

Perihel: sonnen nächste Pkt

Aphel: " ferne Pkt

(3)  $\boxed{\epsilon=1, E=0}$  ... Parabel

Kartes. Koord.  $\xrightarrow[\text{0.5}]{(6.21)}$   $x = -\frac{1}{2p} y^2 + \frac{p}{2}$  (6.23)



$F_1$  ... Brennpkt

" Bahn eines Masse körpers der tangential von Erdoberfläche abgeschlossen wird und gerade dem Grav. pot. entkommt.  $[v_y = \sqrt{2gR}$  (4.13)]