

Interessanter für Skripterstellung: bitte nach der Vorlesung melden

## 6.4. Das Keplerproblem

Parameter:  $p = \frac{L^2}{\mu \alpha}$  (6.20)

Exzentrizität:  $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu \alpha^2}}$

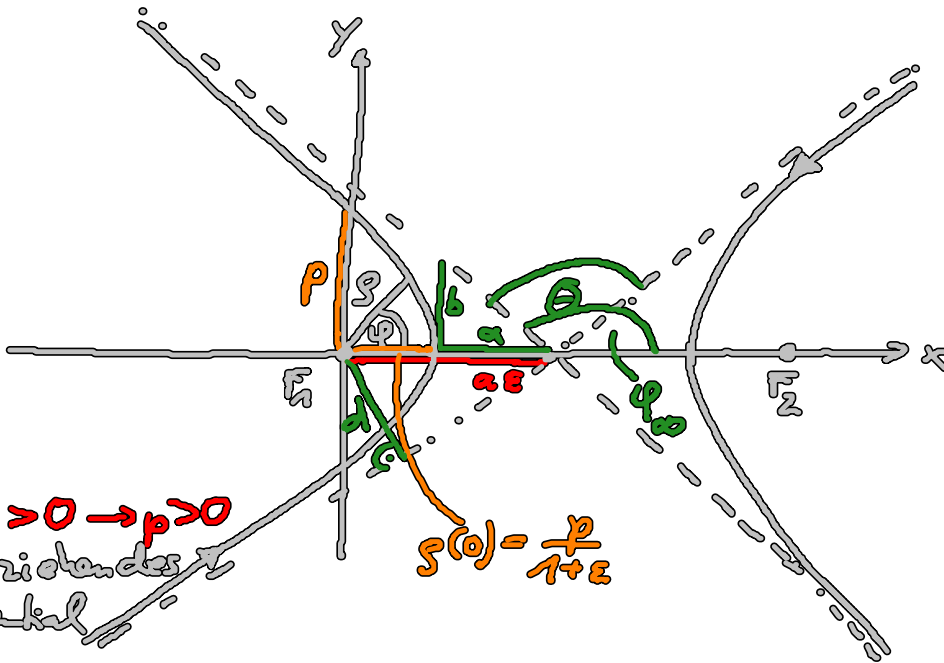
$S = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$  (6.21)

„Keplerschnitt“

(4)  $e > 1, E > 0$  ... Hyperbel, „Streuung“ eines Kometen an der Erde/Sonne

$S, \cos \varphi$  (6.21) o.B.  $\rightarrow$  linkes Kond:  $\frac{(x - a e)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  (6.24)

„Halbachsen“:  $a = \frac{p}{e^2 - 1}, b = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}}$



$\alpha < 0, p < 0$   
 .. abstoßendes Pot.  
 $\hat{=}$  Rutherford-Streuung

$F_1$  .. Brennpunkte

$\alpha > 0 \rightarrow p > 0$   
 anziehendes Potential  
 $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$

## Streuung

Asymptoten:  $\varphi \rightarrow \infty \rightarrow \cos \varphi_0 = -\frac{1}{\epsilon}$  (vgl. (6.24))

Ablenkwinkel/Streuwinkel:  $\Theta = \pi - 2(\pi - \varphi_0) = 2\varphi_0 - \pi$

Stoßparameter:  $d$

$$d(\Theta)? \quad d = a \epsilon \sin(\pi - \varphi_0) = \underbrace{a \epsilon}_{\epsilon = -\frac{1}{\cos \varphi_0}} \sin(\pi - \varphi_0) = -a \tan \varphi_0 = -a \tan\left(\frac{\Theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\ = a \cot \frac{\Theta}{2}$$

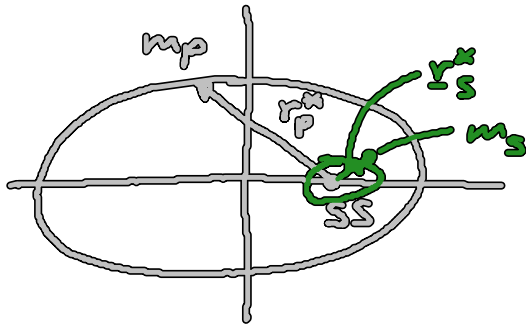
$-\sin(\varphi_0 - \pi) = \sin \varphi_0$

mit  $a = \frac{p}{\epsilon^2 - 1}$  (6.20)  $\frac{\alpha}{2E} \rightarrow \boxed{d(\Theta) = \frac{|k|}{2E} \cot \frac{\Theta}{2}} \quad (6.25)$

## b) Keplersche Gesetze

- $m_2 = m_S \dots$  Sonne (6.4)
- $m_1 = m_P \dots$  Planet

$$\underline{r}_2 = \underline{r}_S = \underline{R} - \frac{m_P}{M} \underline{r} \xrightarrow{SS} \underline{r}_S^* = -\frac{m_P}{M} \underline{r}$$
$$\underline{r}_1 = \underline{r}_P = \underline{R} + \frac{m_S}{M} \underline{r} \xrightarrow{SS} \underline{r}_P^* = \frac{m_S}{M} \underline{r}$$



$$\frac{m_{\text{Jupiter}}}{m_S} \approx 10^{-3}$$

$$\frac{m_{\text{Mond}}}{m_{\text{Erde}}} \approx \frac{1}{81}$$

- Keplersche Gesetze: ( $m_P \ll m_S \rightarrow \underline{r}_S^* \approx 0, \underline{r}_P^* = \underline{r}$ )

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen um die Sonne, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2. Flächensatz (Orbitimpulserhaltung): Kap. 2.3

Der Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen

(6.26)

3. Die Quadrate der Umlaufzeiten ( $T$ ) sind proportional zu den Kuben der großen Halbachsen ( $a$ ) der Planetenbahnen:  $T^2 = c a^3$

Beweis zu 3. Fläche Ellipse:  $A = \int_0^T \frac{dA}{dt} dt = \int_0^T \frac{L}{2\mu} dt = \frac{L}{2\mu} T$   
 $\stackrel{!}{=} \pi ab$

aus (6.22):  $b = \sqrt{ap} \stackrel{(6.20)}{=} \sqrt{\frac{a}{\mu\alpha}} L$

$\rightarrow T^2 = c a^3$  mit  $c = 4\pi^2 \frac{\mu}{\alpha} = 4\pi^2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{1}{\gamma m_1 m_2}$

$c = \frac{4\pi^2}{\gamma^2 (m_1 + m_2)} \stackrel{!}{\approx} \frac{4\pi^2}{\gamma^2 m_S} \quad (6.27)$

... nur Näherung wäre gleich für alle Planeten

c) Bemerkungen

• Zentralpotential: - geschlossene Bahnen für  $E < 0$ :

$U \sim \frac{1}{r}, \sim r^2$  o.B.!!

- sonst: z.B. "Periheldrehung"



Bsp 1: Planetenbahnen um Sonne

Störungen: 1. Grav. Kräfte untereinander  
 2. Rel. Effekte

$U_{\text{eff}} = -\gamma \frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \gamma \frac{ML^2}{mc^2 r^3} \quad (6.28)$

Abweichung von  $\frac{1}{r}$

3. Abplattung der Sonne ("Quadrupolmoment")

ART

Merkur:  $\frac{\Delta\varphi}{\text{Jahr}} \approx 57,131'' = 90\%(1.) + 10\%(2.)$

Bogen  
sekunde

Bsp2: Satelliten um Erde:  $\approx 100\%$  Abplattung der Erde

- Planetensystem = Viel Körperproblem  $\rightarrow$  chaotisches Verhalten
- Lenzscher Vektor  $\underline{M}$ : weitere Konstante der Bewegung  
für  $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$

$$\underline{M} = \mu (\dot{\underline{r}} \times \underline{r}) \times \dot{\underline{r}} - \alpha \frac{\underline{r}}{r}, \quad \frac{d\underline{M}}{dt} = 0 \quad (6.29)$$

## 7. Nichtinertialsysteme

• Inertialsystem (IS):  $\underline{r}$ , Newton:  $m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}$  (7.1)  
physikal. Gesamtkraft

Kap. 1.4.: IS  $\rightarrow$  IS':  $\underline{r}' = \underline{r} - \underline{v}t \rightarrow \ddot{\underline{r}}' = \ddot{\underline{r}}!$

• Nichtinertialsystem (KS'):  $\underline{r}'$ ,  $\ddot{\underline{r}}' + \underline{b}_0 = \ddot{\underline{r}}$  (7.2)

Beschl. von KS'  
relativ zu IS

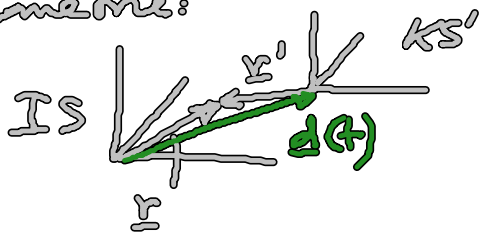
Bew.gl.? (7.2) in (7.1):  $m\ddot{\underline{r}}' + m\underline{b}_0 = \underline{F}'$   
physikal. Gesamtkraft in KS'

$$\rightarrow m\ddot{\underline{r}}' = \underline{F}' + \underline{F}'_S, \quad \underline{F}'_S = -m\underline{b}_0 \dots \text{Schein-} \quad (7.3)$$

... "Newton mit Schein-  
kraft"

### 7.1 Linear beschleunigte BS

• Geometrie:



$$\frac{d(\underline{r})}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} \underline{b}_0$$

dem:  $\underline{r}' + \frac{d(\underline{r})}{dt} = \underline{r} \rightarrow \ddot{\underline{r}}' + \underline{b}_0 = \ddot{\underline{r}}$

• Bsp: 1. ruhender Körper ( $\ddot{\underline{r}}' = 0, \dot{\underline{r}}' = 0$ ) in  $KS'$ :

freifallender Fahrstuhl:  $\underline{b}_0 = \underline{g}$

$$(7.3) \rightarrow \left. \begin{array}{l} \underline{F}' = m \underline{g} \dots \text{Gewichtskraft} \\ \underline{F}'_S = -m \underline{g} \dots \end{array} \right\} \ddot{\underline{r}}' = 0!$$

2. Fahrer im bremsenden Auto ( $\underline{b}_0$ ), ohne Gurt:  $\underline{F}' = 0$

$$(7.3) \rightarrow m \ddot{\underline{r}}' = \underline{F}'_S = -m \underline{b}_0 \rightarrow \text{Windschutzscheibe}$$

## 7.2. Rotierende BS