II. NM für Vielteilchensysteme

8. Newtonsche Grundgleichungen & Folgerungen

8.1 Grundgleichungen

• $m_\nu \ddot{\underline{r}}_\nu = \frac{d}{dt}\underline{p}_\nu = \underline{F}_\nu$

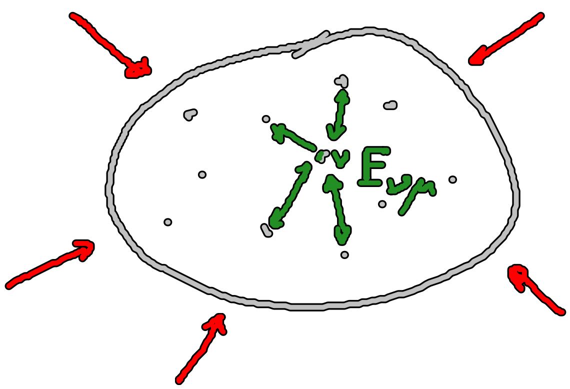
$$\boxed{\begin{aligned}\underline{F}_\nu &= \underline{F}_\nu^{(a)} + \underline{F}_\nu^{(i)} \\ &= \underline{F}_\nu^{(a)} + \sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{N} \underline{F}_{\nu\mu}\end{aligned}} \quad (8.1)$$

$$\underline{F}^{(a)} = \sum_{\nu=1}^{N} \underline{F}_\nu^{(a)} \quad (8.2)$$

$$\underline{F}_{\nu\mu}(\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu) = -\underline{F}_{\mu\nu}(\underline{r}_\mu - \underline{r}_\nu) \quad (8.4)$$

$$\rightarrow \underline{F}_{\nu\nu} = 0\,! \longrightarrow \sum_{\substack{\mu=1\\ \nu\neq\mu}}^{N} \underline{F}_{\nu\mu} = \sum_{\mu} \underline{F}_{\nu\mu} \quad (8.5)$$

$$\underline{F}^{(i)} = \sum_{\nu,\mu=1}^{N} \underline{F}_{\nu\mu} \doteq 0 \quad (8.6)$$



8.2 Folgerungen

a) Impulssatz

· Def: Gesamtimpuls $\boxed{\underline{P} = \sum_\nu \underline{p}_\nu = \sum_\nu m_\nu \dot{\underline{r}}_\nu}$ (8.7)

· $\sum_\nu$ (8.1):

$$\dot{\underline{P}} = \sum_\nu \dot{\underline{p}}_\nu = \sum_\nu \underline{F}_\nu^{(a)} + \underbrace{\sum_{\nu\mu} \underline{F}_{\nu\mu}}_{=0\ [\text{s. } (8.6)]}$$

$\longrightarrow$ Impulssatz: $\boxed{\dot{\underline{P}} = \sum_\nu \underline{F}_\nu^{(a)} = \underline{F}^{(a)} \quad (8.8)}$

zeitl. Änderung von $\underline{P}$ = Summe der angreifenden Kräfte

• „abgeschlossene" Systeme ($\underline{F}^{(a)} = 0$): $\boxed{\dot{\underline{P}} = 0 \longrightarrow \underline{P} = \text{konst.}}$ (8.9)

b) Schwerpkt.satz = Impulssatz:

• Def: Schwerpkts. koordinate:

$$\underline{R} = \frac{\sum_{\nu=1}^N m_\nu \underline{r}_\nu}{M} \quad \text{mit } M = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \dots \text{Gesamtmasse} \qquad (8.10)$$

... „Mittelpkt" der trägen (& schweren) Masse

NB: unabh. von Wahl des KS: $\underline{r}_\nu = \underline{r}_\nu' + \underline{d} \xrightarrow[(8.10)]{\text{in}} \underline{R} = \underline{R}' + \underline{d}$

• Schwerpkt.satz:

$$\dot{\underline{P}} = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \ddot{\underline{r}}_\nu \overset{(8.10)}{=} M \ddot{\underline{R}} \quad \text{in } (8.8)$$

$\longrightarrow$ $M \ddot{\underline{R}} = \underline{F}^{(a)}$ (8.11)

Der Schwerpkt. bewegt sich so, als ob die Gesamtmasse M in ihm vereinigt sei und alle (äußeren) Kräfte an ihm angreifen

Bem: (i) keine $\underline{F}_{\nu\mu}$ in (8.11) $\longrightarrow$ „Man kann sich nicht am eigenen Schopf aus dem Sumpf ziehen"

(ii) realer Körper $\equiv$ Massepkt ($M, \underline{R}$) & innere Bewegungen

c) Drehimpulssatz

• Def: Gesamtdrehimpuls

$$\underline{L} = \sum_{\nu=1}^N \underline{L}_\nu \quad \text{mit } \underline{L}_\nu = m \underline{r}_\nu \times \dot{\underline{r}}_\nu = \underline{r}_\nu \times \underline{p}_\nu \qquad (8.12)$$

Bem: bezogen auf Ursprung des KS!

• Herleitung

$\sum_\nu \underline{r}_\nu \times$ (8.1) : l.S. $\sum_\nu m_\nu \underline{r}_\nu \times \underline{\ddot{r}}_\nu = \sum_\nu m_\nu \frac{d}{dt}(\underline{r}_\nu \times \underline{\dot{r}}_\nu) - \underbrace{\underline{\dot{r}}_\nu \times \underline{\dot{r}}_\nu}_{=0} \Big\} = \underline{\dot{L}}$ (8.12)

$m_\nu \underline{\ddot{r}}_\nu = \underline{F}_\nu$

r.S. $\underline{D} = \sum_{\nu=1}^{N} \underline{r}_\nu \times \underline{F}_\nu^{(a)} + \underbrace{\sum_{\nu,\mu=1}^{N} \underline{r}_\nu \times \underline{F}_{\nu\mu}}$

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu\mu}(\underline{r}_\nu \times \underline{F}_{\nu\mu} + \underline{r}_\mu \times \underbrace{\underline{F}_{\mu\nu}}_{-\underline{F}_{\nu\mu}})$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\nu\mu}(\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu) \times \underline{F}_{\nu\mu}$$

$= 0$, falls $\underline{F}_{\nu\mu} \parallel \underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu$

$$\boxed{\text{Zentralkräfte } \underline{F}_{\nu\mu} \longrightarrow \text{Gesamtdrehmoment der inneren Kräfte: } \underline{D}^{(i)} = \sum_{\nu\mu=1}^{N} \underline{r}_\nu \times \underline{F}_{\nu\mu} = 0} \quad (8.13)$$

$\longrightarrow$ <u>Drehimpulssatz</u>

$$\boxed{\frac{d\underline{L}}{dt} = \underline{D} \quad \text{mit } \underline{D} = \sum_\nu \underline{r}_\nu \times \underline{F}_\nu^{(a)}} \quad (8.14)$$

... Gesamtdrehmoment der äußeren Kräfte

• Drehimpulserhaltung:

$$\boxed{\underline{D} = 0 \longrightarrow \underline{\dot{L}} = 0 \longrightarrow \underline{L} = \text{konst.}} \quad (8.15)$$

<u>Bsp:</u> abgeschlossene Systeme (im engeren Sinne): $\underline{F}_\nu^{(a)} = 0$!

d) Energiesatz

- Annahme: konservative Kräfte $\longrightarrow$ Potentiale existieren

äußere Kräfte: $\underline{F}_\nu^{(a)} = -\operatorname{grad}_\nu U^{(a)}$ mit $U^{(a)} = \sum_{\nu=1}^{N} U_\nu^{a}(\underline{r}_\nu)$ (8.16)

bzgl. $\underline{r}_\nu$

- innere Kräfte: $\underline{F}_{\nu\mu} = -\operatorname{grad}_\nu U_{\nu\mu}(|\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu|)$ (8.17)

$$= -\underline{F}_{\mu\nu} = -\operatorname{grad}_\mu \underbrace{U_{\nu\mu}(|\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu|)}_{= U_{\mu\nu}(|\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu|)}$$

- Energieerhaltungssatz (EES):

$$\sum_\nu \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \Big| \; m_\nu \ddot{\underline{r}}_\nu = \underline{F}_\nu^{(a)} + \sum_\mu \underline{F}_{\nu\mu}$$

(i) l.S.: $\sum_\nu \dot{\underline{r}}_\nu \cdot m_\nu \ddot{\underline{r}}_\nu = \frac{d}{dt} \sum_\nu \frac{m_\nu}{2} \dot{\underline{r}}_\nu^{\,2} = \frac{d}{dt} T$

Def: kinetische Gesamtenergie $\boxed{T = \sum_\nu \frac{m_\nu}{2} \dot{\underline{r}}_\nu^{\,2}}$ (8.18)

(ii) r.S. äußere Kräfte: $\sum_\nu \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \underline{F}_\nu^{(a)} \overset{(8.16)}{=} -\sum_\nu \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \operatorname{grad}_\nu U^{(a)} = -\frac{d}{dt} U^{(a)}$

Def: Ges. pot. Energie im äußeren Kraftfeld $\boxed{U^{(a)} = \sum_\nu U_\nu^{(a)}(\underline{r}_\nu)}$ (8.19)

(iii) r.S. innere Kräfte: $\sum_{\nu\mu} \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \underline{F}_{\nu\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\nu\mu} \left(\dot{\underline{r}}_\nu \cdot \underline{F}_{\nu\mu} + \dot{\underline{r}}_\mu \cdot \underline{F}_{\mu\nu} \right)$

$$\overset{(8.17)}{=} -\frac{1}{2} \sum_{\nu\mu} \left[\dot{\underline{r}}_\nu \cdot \operatorname{grad}_\nu U_{\nu\mu}(|\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu|) + \dot{\underline{r}}_\mu \cdot \operatorname{grad}_\mu U_{\nu\mu}(|\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu|) \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{\nu\mu} \frac{d}{dt} U_{\nu\mu}(|\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu|)$$

$$= -\frac{d}{dt}\, U^{(i)}$$

Def: Ges. Ww.energie im System: $\boxed{U^{(i)} = \frac{1}{2}\sum_{\nu\mu} u_{\nu\mu}(|\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu|)}$ (8.20)

$$\xrightarrow{(i)\,\&\,(ii)\,\&\,(iii)} \quad \frac{d}{dt}\left(T + U^{(a)} + U^{(i)}\right) = 0 \quad (8.21)$$

$\longrightarrow$ EES bei kons. Kräften: $\boxed{T + U^{(a)} + U^{(i)} = E}$ (8.22)

„Gesamtenergie"

• mit dissipativen Kräften: $\underline{F}_{\nu,diss}$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt}\left[T + U^{(a)} + U^{(i)}\right] = \sum_{\nu=1}^{N} \underline{F}_{\nu diss} \cdot \dot{\underline{r}}_\nu} \quad (8.23)$$

• Arbeit am System: von Zustand $(1) = \{\underline{r}_\nu(t_1)\}$ nach $(2) = \{\underline{r}_\nu(t_2)\}$

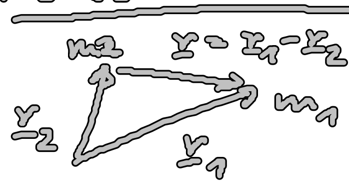
$$\boxed{A_{12} = \sum_\nu \int \underline{F}_\nu \cdot d\underline{r}_\nu = \sum_\nu \int \underline{F}_\nu \cdot \dot{\underline{r}}_\nu \, dt} \quad (8.24)$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{T(2) - T(1) = A_{12}} \quad (8.25)$$

• konservative Systeme:

$$\xrightarrow[(8.20)]{(8.19)\,\&} \quad \boxed{A_{12} = -\left[U^{(a)}(2) + U^{(i)}(2) - U^{(a)}(1) - U^{(i)}(1)\right]} \quad (8.26)$$

9. Das Zweikörper-Problem



Kräfte: $\underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21}(\underline{r})$

$\underline{F}_1^{(a)}(\underline{r}_1)$, $\underline{F}_2^{(a)}(\underline{r}_2)$

a) Grundgleichungen

• Newton:

$$m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = \underline{F}_1^{(a)} + \underline{F}_{12} \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = \underline{F}_2^{(a)} - \underline{F}_{12} \quad (2)$$

(9.1)

• Rel. & Schwerpkts. bewegung:

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{r} &= \underline{r}_1 - \underline{r}_2\\ \underline{R} &= \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{M = m_1 + m_2}\end{aligned}} \quad (9.2) \Bigg\} \longleftrightarrow \Bigg\{ \boxed{\begin{aligned}\underline{r}_1 &= \underline{R} + \frac{m_2}{M}\underline{r}\\ \underline{r}_2 &= \underline{R} - \frac{m_1}{M}\underline{r}\end{aligned}} \quad (9.3)$$

$$\left.\begin{aligned}&(9.1)\quad (1)+(2): & M\ddot{\underline{R}} &= \underline{F}_1^{(a)}(\underline{r}_1) + \underline{F}_2^{(a)}(\underline{r}_2)\\ &\frac{(1)}{m_1} - \frac{(2)}{m_2}: & \ddot{\underline{r}} &= \frac{1}{m_1}\underline{F}_1^{(a)}(\underline{r}_1) - \frac{1}{m_2}\underline{F}_2^{(a)}(\underline{r}_2) + \frac{1}{\mu}\underline{F}_{12}(\underline{r})\end{aligned}\right\} (9.4)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{1}{\mu} &= \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\\ \longrightarrow \mu &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\end{aligned}} \quad (9.5)$$

... reduz. Masse

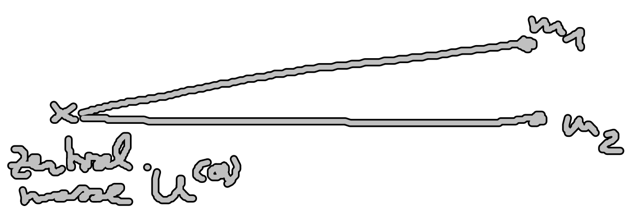
• <u>Entkoppeln</u> der Bew.gl. (9.4)

$$\xrightarrow{!} \boxed{\frac{\underline{F}_1^{(a)}}{m_1} = \frac{\underline{F}_2^{(a)}}{m_2}} \quad (9.6)$$

Bsp: $\underline{F}_i^{(a)} = -\underline{\nabla}_i U(\underline{r}_i)$ mit

$$|\underline{r}| \ll \underbrace{\frac{U^{(a)}(\underline{r}_i)}{|\underline{\nabla}_i U^{(a)}(\underline{r}_i)|}}_{\text{Längenskala auf der } U^{(a)} \text{ variiert}}$$

Gravitation: z. B. Erdoberfläche



$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned}\underline{F}_1^{(a)} &= m_1 \underline{g}\\ \underline{F}_2^{(a)} &= m_2 \underline{g}\end{aligned}} \quad (9.7)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\ddot{\underline{R}} &= \underline{g}\\ \mu\ddot{\underline{r}} &= \underline{F}_{12}(\underline{r})\end{aligned}} \quad (9.8)$$

[→ vgl. Kap. 6]