$$\dot{\underline{L}} = \underline{D} \quad (10.44)$$

$$\underline{L} = \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega} \qquad \underline{D} = \sum_\nu \underline{r}_\nu \times \underline{F}_\nu^{(a)}$$

b) Eulersche Gleichungen

- Zeitabl. in (10.44): $\dot{} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{IS} \overset{(7.11)}{=} \left(\frac{d}{dt}\right)_{KS} + \underline{\omega}\times \quad (7.11)$

also (10.44) mit (7.11) & $\underline{L} = \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega}$:

$$\left(\frac{d\,\underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega}}{dt}\right)_{KS} + \underline{\omega}\times(\underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega}) = \underline{D}$$

$$\left(\frac{d\underline{\underline{\Theta}}}{dt}\right)_{KS} = 0! \qquad \underline{\underline{\Theta}}\left(\frac{d\underline{\omega}}{dt}\right)_{KS} + \underline{\omega}\times(\underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega}) = \underline{D} \quad (10.45)$$

- Drehimpulssatz im körperfesten Hauptachsensystem $\{\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(3)}\}$ des starren Körpers:

$$\underline{\underline{\Theta}} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & & 0 \\ & \Theta_2 & \\ 0 & & \Theta_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \Theta_1\omega_1 \\ \Theta_2\omega_2 \\ \Theta_3\omega_3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\omega}_i &= \left(\frac{d\omega_i}{dt}\right)_{KS} \\ \left(\frac{d\underline{e}^{(i)}}{dt}\right)_{KS} &= 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \Theta_1\dot{\omega}_1 + (\Theta_3-\Theta_2)\,\omega_2\omega_3 &= D_1 \\ \Theta_2\dot{\omega}_2 + (\Theta_1-\Theta_3)\,\omega_1\omega_3 &= D_2 \\ \Theta_3\dot{\omega}_3 + (\Theta_2-\Theta_1)\,\omega_1\omega_2 &= D_3 \end{aligned}} \quad (10.46)$$

... Eulersche Gln.

$$\longrightarrow \underline{\omega} = \omega_i\,\underline{e}^{(i)} \quad \text{... (körperfest)}$$

$$\xrightarrow[\text{Dgl.}]{(10.8)} \phi(t),\ \theta(t),\ \psi(t)$$

Vorteil von KS: $\underline{\underline{\Theta}}$, Θ_i = konst.

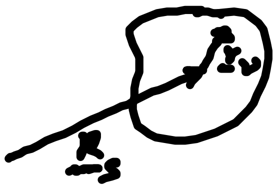
Nachteil " : zeitabh. D_i, bestimmt durch Bewegung des starren Körpers!

Anwendungen:

c) Rotation um freie Achse (hom. Grav. feld):

Bsp: freifallender Körper: $\underline{R} = \underline{R}_S$

$$\longrightarrow \underline{D} = \sum_\nu \underline{r}_\nu \times m_\nu \underline{g} = \underbrace{\left(\sum_\nu \underline{r}_\nu m_\nu\right)}_{0} \times \underline{g} = 0!$$



Ges: Lsg. von (10.46) mit $\dot{\omega}_i = 0$ [vgl: $m\dot{\underline{v}} = 0 \to \underline{v} = \text{konst.}$]

$$(10.46) \xrightarrow[\dot{\omega}_i = 0]{D_i = 0} \left.\begin{aligned} (\Theta_3 - \Theta_1)\,\omega_2\omega_3 &= 0 \\ (\Theta_1 - \Theta_2)\,\omega_1\omega_3 &= 0 \\ (\Theta_2 - \Theta_1)\,\omega_1\omega_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[i \neq j]{\substack{\text{allg. Fall} \\ \Theta_i \neq \Theta_j}} \boxed{\begin{aligned} &\omega_1 = \text{konst},\ \omega_2 = \omega_3 = 0 \\ &\text{\& zykl. Vertauschg} \end{aligned}}$$

(10.47)

$\hat{=}$ gleichf. Rotationen um Hauptachsen $\underbrace{\text{mit fester Richtg im IS}}$

Bew: $\underline{D} = 0 = \left(\frac{d\underline{L}}{dt}\right)_{IS} \to \underline{L} = \text{konst in IS}$
$= \Theta_1 \omega_1 \underline{e}^{(1)}$
$\to \underline{e}^{(1)} = \text{konst.}$ im IS ged

• **Beh:** $\boxed{\text{Rotation um Hauptachse mit mittlerem } \Theta_i \text{ ist instabil!}}$

d) kräftefreier symm. Kreisel

• Löse (10.46) für $\Theta_1 = \Theta_2 \neq \Theta_3$ & $D_i = 0$

Bsp: rot. symmetr. Körper um $\underline{e}^{(3)}$ = Figurenachse

$\longrightarrow$ Kardanischer Kreisel

$\longrightarrow$ freifallender Körper: Bsp Erde ($\underline{D}^{\text{Sonne}} \approx 0$, $\underline{D}^{\text{Mond}} \approx 0$)

$$(10.46) \xrightarrow[\Theta_1 = \Theta_2]{D_i = 0} \begin{aligned} \Theta_1 \dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_1)\,\omega_2\omega_3 &= 0 \quad (1) \\ \Theta_2 \dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3)\,\omega_1\omega_3 &= 0 \quad (2) \\ \Theta_3 \dot{\omega}_3 &= 0 \longrightarrow \boxed{\omega_3 = \omega_0} \quad (10.48) \end{aligned}$$

$(1),(2) \xrightarrow{(10.49)}$ $\dot{\omega}_1 - \Omega\,\omega_2 = 0$ (3)

$\dot{\omega}_2 + \Omega\,\omega_1 = 0$ (4)

mit $\boxed{\Omega = \frac{\Theta_1 - \Theta_3}{\Theta_1}\,\omega_0}$ (10.50)

$\frac{d}{dt}(3)$ & (4). $\ddot{\omega}_1 + \Omega\,\omega_1 = 0 \longrightarrow$

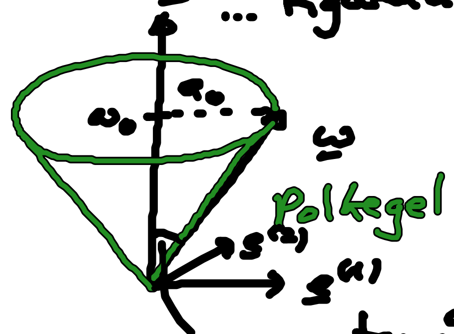
$\xrightarrow{\text{in }(4)}$ $\boxed{\begin{aligned} \omega_1(t) &= -a_0 \cos(\Omega t + \psi_0) \\ \omega_2(t) &= a_0 \sin(\Omega t + \psi_0) \end{aligned}}$ (10.51)

a_0, ψ_0 ... Integ. Konst.

... Kreisbewegg: $\omega_1^2 + \omega_2^2 = a_0^2$

Skizze $\longrightarrow$

$s^{(3)}$ ... Figurenachse



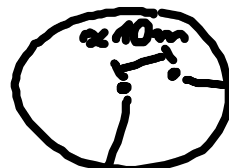
$\underline{\omega}$ präzessiert / rotiert auf Polkegel um $\underline{s}^{(3)}$

mit Kreisfrequenz $|\Omega|$

$\gamma = \arctan\frac{a_0}{\omega_0}$ .. Öffnungswinkel

• **Bsp:** Erde

$|\Omega| = \frac{|\Theta_1 - \Theta_3|}{\Theta_1}\,\omega_0 = \frac{1}{300}\,\frac{2\pi}{\text{Tag}} = \frac{2\pi}{10\,\text{Monate}}$



kinemat. Nordpol $\underline{\omega}$

N = geometr. Nordpol: $\underline{s}^{(3)}$

real: $\Omega = \frac{2\pi}{427}$ Tage

& keine regelm. Präzession um $\underline{s}^{(3)}$

Grund: (i) Erde nicht starr: elast. Verformungen

Verschiebungen in Atmosphäre & Meeren

(ii) $\underline{D} \neq \underline{0}$

• Bewegung im IS? $\left(\frac{d\underline{L}}{dt}\right)_{IS} \overset{\underline{D}=0}{=} 0 \longrightarrow \underline{L} = L\,\underline{e}_{I3} = \text{konst.} !$

$\omega_3=\omega_0$, $\omega_{1/2}(t)$ in (10.8) $\longrightarrow$ Eulersche Winkel: (10.52)

o.B.: $\boxed{\phi = \frac{a_0 t}{\sin\Theta_0} + \phi_0 , \quad \psi = \Omega t + \psi_0 \quad \Theta = \Theta_0 \text{ mit } \tan\Theta_0 = \frac{a_0}{\omega}\frac{\Theta_1}{\Theta_3}}$

Drehung von $\underline{e}^{(3)}$ um $\underline{e}_{I3}$

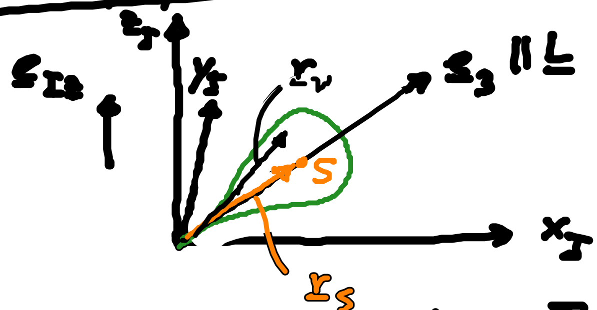
Dreh. des starren Körpers um $\underline{e}^{(3)}$

$\sphericalangle$(Figurenachse $\underline{e}^{(3)}$, $\underline{e}_{I3}$)

(10.6): $\underline{\omega} = \dot\phi\, \underline{e}_{I3} + \dot\psi\, \underline{e}_3$ ... liegt in Ebene von $\underline{e}_{I3}$, $\underline{e}^{(3)}$

$\longrightarrow$
1. $\underline{\omega}$ rotiert auf Spurkegel um $\underline{e}_{I3}$ } reguläre Präzession
2. Polkegel rollt auf Spurkegel ab }

e) Schwerer, symmetr. Kreisel: $D_i \neq 0$



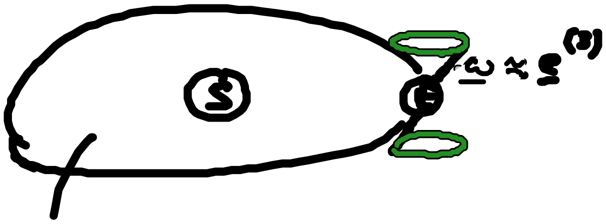
• homog. Grav. feld: $\underline{D} = -\sum_\nu \underline{r}_\nu \times m_\nu g\, \underline{e}_{I3}$

$\left(\underline{r}_S = \frac{\sum m_\nu \underline{r}_\nu}{M}\right) \Longrightarrow \underline{D} = -\underline{r}_S \times Mg\,\underline{e}_{I3} = \frac{d\underline{L}}{dt} \perp \underline{e}^{(3)} (\parallel \underline{r}_S)$

• sei $\underline{L} \parallel \underline{e}^{(3)}$ $\xrightarrow{\frac{d\underline{L}}{dt} \perp \underline{L}}$ $\underline{L} \parallel \underline{e}^{(3)}$ präzediert um z_I-Achse!

• o.B. allg. Bewegung: Präzession & Nutation
↪ „Torkeln" des Kreisels

• Erde: $\underline{D}^{Sonne} \neq 0$, $\underline{D}^{Mond} \neq 0$ $\longrightarrow$ astronomische Präzession der Erdachse um Normale der Ekliptik, Periode von 26000 Jahre



Ekliptik

f) Eingespannter Kreisel: