$$\boxed{\underline{D} = \dot{\underline{L}} \quad , \quad \underline{L} = \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega}}$$

f) <u>Eingespannter Kreisel</u>: orts- und körperfeste Drehachse

(1) Rot.symmetrie um Drehachse $\underline{\omega} \parallel \underline{e}_{I3} = \underline{e}_3$

$$\longrightarrow \quad \underline{\underline{\Theta}}_I = \begin{pmatrix} \Theta_{I11} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{I11} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{I33} \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \quad \underline{L} = \underline{\underline{\Theta}}_I\, \omega\, \underbrace{\underline{e}_{I3}}_{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}} = \Theta_{I33}\, \omega\, \underline{e}_{I3} \parallel \underline{\omega}$$

mit $\dot{\underline{\omega}} = 0, \; \dot{\Theta}_{I33} = 0 \longrightarrow \dot{\underline{L}} = 0 \longrightarrow \underline{D} = 0$ ✓

(2) <u>ohne</u> Rot.symmetrie "$\hat{=}$" <u>nicht</u> <u>ausgerichteter</u> starrer Körper

$\Theta_{I13}(t),\ \Theta_{I23}(t) \neq 0$

mit $\underline{\omega} = \omega\, \underline{e}_{I3} \longrightarrow L_{I1} = \Theta_{I13}(t)\,\omega$

$L_{I2} = \Theta_{I23}(t)\,\omega$

$$\longrightarrow \left.\begin{aligned} D_{I1} &= \dot{L}_{I1} = \dot{\Theta}_{I13}\,\omega \\ D_{I2} &= \dot{L}_{I2} = \dot{\Theta}_{I23}\,\omega \end{aligned}\right\}$$

Drehmomente, die durch <u>Lager</u> aufgebracht werden müssen $\hat{=}$ <u>Lagerkräfte</u>

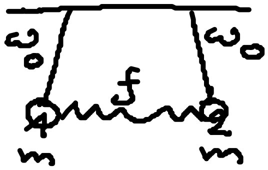
(Bsp: Autorad)

g) <u>physikalische Pendel</u> $\longrightarrow$ Übungen

11. <u>Harmonisch gekoppelte Massepkte</u>

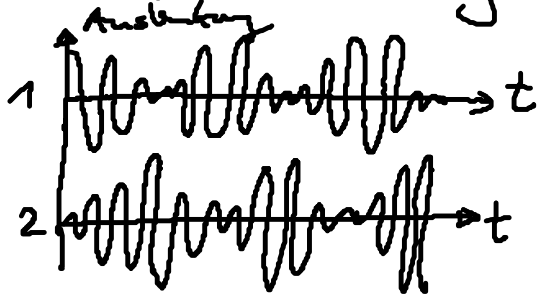
11.1. <u>Motivation</u>

- gekoppelte Pendel:



Spezialfall: schwache Kopplung: $\omega_0^2 \gg \frac{f}{m}$

$\longrightarrow$ Schwebungen: Energie pendelt zwischen 1 & 2

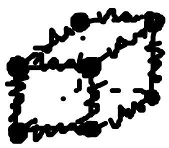


- Molekülschwingungen:

$C_2H_2 \hat{=} H-C\equiv C-H$

- Gitterschwingungen des Festkörpers

$\longrightarrow$ quantisiert: Phononen



$\longrightarrow$ Festkörperphysik: spezifische Wärme, elektr./therm. Leitfähigkeit

Untersuche über Spektroskopie (Einstrahlung von EM-Wellen & Absorption)

$\Longrightarrow$ <u>Eigenfrequenzen</u>

- Modell für Saite:

11.2 <u>Grundproblem</u>

- N Massepkte im 3d-Ortsraum: Freiheitsgrade: $f = 3N$
- Führe ein: 3N-dim. kartesischen Konfigurationsraum:

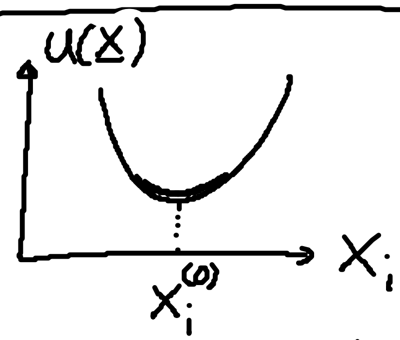
$$\text{Vektor } \underline{X} = (\underbrace{\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_N}_{\text{Ortskoord. der N Teilchen}}) = (X_1, X_2, X_3 \dots X_i \dots X_{3N}) \quad (11.1)$$

Bsp: $y_{923} = X_{2768}$

$\underline{X}$ … charakt. Anordnung der N Massepkte

• konserv. System: pot. Energie $U = U(\underline{X})$ (11.2)

• Def: $$\boxed{\begin{array}{l}\text{Gleichgewichtslage } \underline{X}^{(0)} \text{ des Systems} \\ \hat{=} \text{ Minimum von } U(\underline{X}): \quad \left.\frac{\partial U}{\partial X_i}\right|_{\underline{X}^{(0)}} = 0 \quad \forall i\end{array}}$$ (11.3)



• „Harmonische Kopplung" ≙ Potential in „harmonischer" Näherung

mit $\underline{X} = \underline{X}^{(0)} + \underline{x}$, wobei $\underline{x}$ … Auslenkung aus GG-Lage

$$U(\underline{X} = \underline{X}^{(0)} + \underline{x}) \overset{\text{Taylor}}{=} U(\underline{X}^{(0)}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{3N} \left.\frac{\partial U}{\partial X_i}\right|_{\underline{X}^{(0)}}}_{=0!\ (11.3)} x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N}\sum_{j=1}^{3N} \left.\frac{\partial^2 U}{\partial X_i \partial X_j}\right|_{\underline{X}^{(0)}} x_i x_j + \ldots$$

mit „Federkonstantenmatrix" $$\boxed{U_{ij} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial X_i \partial X_j}\right|_{\underline{X}^{(0)}}}$$ (11.4)

→ Potential: $$\boxed{U(\underline{X}) = U(\underline{X}^{(0)}) + \underbrace{\frac{1}{2} U_{ij} x_i x_j}_{= \frac{1}{2} \underline{x}\cdot\underline{\underline{U}}\,\underline{x}}}$$

mit $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{3N} \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{U}}$ mit $[\underline{\underline{U}}]_{ij} = U_{ij}$

… $3N \times 3N$-Matrix: (i) symmetrisch: $\frac{\partial^2 U}{\partial X_i \partial X_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial X_j \partial X_i}$

(ii) positiv definit: $\frac{1}{2} \underline{x}\cdot\underline{\underline{U}}\,\underline{x} > 0, \quad \forall \underline{x} \neq \underline{0}$

≙ alle EW > 0

• kinet. Energie:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2}\,\dot{\underline{x}}\cdot\underline{\underline{M}}\,\dot{\underline{x}} \quad \text{mit Massenmatrix } \underline{\underline{M}}:\ M_{ij} = m_i\,\delta_{ij}} \qquad (11.6)$$

NB: $m_1 = m_2 = m_3$ ... Teilchen 1

⋮

• Newtonsche Grundgleichung für den i-ten Freiheitsgrad:

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \overset{(11.5)}{=} -U_{ij}\,x_j \qquad (11.7)$$

$$\left[U = U_0 + \frac{1}{2}U_{ij}\,x_i x_j\right]$$

mit „massereduzierte Koord.": $\boxed{y_i = \sqrt{m_i}\,x_i}$ (11.8)

& dynamische Matrix: $\boxed{\Omega_{ij} = \frac{1}{\sqrt{m_i}}\,U_{ij}\,\frac{1}{\sqrt{m_j}}}$ (11.9)

(11.7): $\sqrt{m_i}\,\ddot{x}_i = -\frac{1}{\sqrt{m_i}}\,U_{ij}\,\frac{1}{\sqrt{m_j}}\sqrt{m_j}\,x_j \longrightarrow$ (11.10) $\boxed{\ddot{y}_i + \Omega_{ij}\,y_j = 0 \longleftrightarrow \ddot{\underline{y}} + \underline{\underline{\Omega}}\,\underline{y} = 0}$

... 3N Bewgl.

• Eigenschaften von $\underline{\underline{\Omega}}$:

(i) symmetrisch: $\Omega_{ij} = \Omega_{ji}$

(ii) positiv definit: pot. Energie: $\xrightarrow{(11.5)} U(\underline{y}) = \frac{1}{2}\,\underline{y}\cdot\underline{\underline{\Omega}}\,\underline{y}$

$> 0,\ \forall\, \underline{y} \neq \underline{0}$

$\hat{=}$ EW von $\underline{\underline{\Omega}} > 0$

Grund: Minimum von $U(\underline{X})$

11.3 Eigenfrequenzen, Eigenschwingungen, Normalkoordinaten

Gln (11.10): $\hat{=}$ mathematisch: $f = 3N$ lineare, homogene Dgl. 2. Ord. mit konst. Koeff.

$\hat{=}$ physikalisch: $f = 3N$ gekoppelte harm. Oszillatoren

$\longrightarrow$ f Lösungen mit je 2 Integ. konstanten

• Lsgs-Ansatz: (vgl. harm. Oszillator Kap. 5.1)

$$\underline{y} = \underline{a}\, e^{i\omega t}, \quad \underline{a} \in \mathbb{R}^{3N}$$

$$\ddot{\underline{y}} + \underline{\underline{\Omega}}\,\underline{y} = 0 \xrightarrow{\text{in (11.10)}/e^{i\omega t}} \boxed{\left[-\omega^2 \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\Omega}}\right] \underline{a} = \underline{0}} \qquad (11.11)$$

... Eigenwertgl. für $\underline{\underline{\Omega}}$: $\quad \underline{\underline{\Omega}}\,\underline{a} = \omega^2 \underline{a}$

$\hat{=}$ lineares homog. algeb. Gln. system

• EW von $\underline{\underline{\Omega}}$? nichttriv. Lsg. von (11.11): $\boxed{\det\left[-\omega^2 \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\Omega}}\right] = 0}$ (11.12)

... Polynom f-ten Grades in ω^2

$\longrightarrow$ EW: $[\omega^{(k)}]^2 > 0$ ($\underline{\underline{\Omega}}$ symmetr., pos. definit)

$$\longrightarrow \boxed{\text{Eigenfrequenzen:} \quad \underset{(-)}{+}\omega^{(k)} \in \mathbb{R}, \ k = 1 \dots 3N} \qquad (11.13)$$

• EV von $\underline{\underline{\Omega}}$? Löse (11.11) mit $\omega^{(k)}$

$$\longrightarrow \boxed{\underline{e}^{(k)} \text{ mit } |\underline{e}^{(k)}| = 1, \quad \underline{e}^{(k)} \cdot \underline{e}^{(\ell)} = \delta_{k\ell}} \qquad (11.14)$$

... vollständige ONB im $\mathbb{R}^{3N}$

- reelle Lsg von (11.10):

$$\left.\begin{array}{l} e^{+i\omega^{(k)}t} \\ e^{-i\omega^{(k)}t} \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{\underline{x}^{(k)}(t) = a^{(k)}\, \underline{e}^{(k)} \cos\left(\omega^{(k)}t - \varphi^{(k)}\right)} \quad (11.15)$$

$\underline{x}(t) = \underline{a}\, e^{i\omega t}$

... Eigen-/Normalschwingung/Eigenmode zur Eigenfrequenz $\omega^{(k)}$

... Integrat. konst: Amplitude $a^{(k)}$, Phase $\varphi^{(k)}$

... EV $\underline{e}^{(k)}$ charakt. kollektive Schwingg <u>aller</u> Massepkte mit unterschiedl. Auslenkung