11. Harmonisch gekoppelte Massepkte

11.3 Eigenfrequenzen, Eigenschwingungen, Normal-koord.

$$\boxed{\ddot{\underline{y}} + \underline{\underline{\Omega}}\,\underline{y} = 0} \qquad (11.10)$$

$\underline{y} \in \mathbb{R}^{3N}$

$\underline{\underline{\Omega}}$ ... $3N \times 3N$ Matrix, symmetr., pos. def.

- Lsg: Ansatz: $\underline{y} = \underline{a}\, e^{i\omega t}$ in (11.10)

$$\rightarrow \quad \boxed{\left[-\omega^2 \mathbb{1} + \underline{\underline{\Omega}}\right]\underline{a} = \underline{0}} \qquad (11.11)$$

EW-Problem für $\underline{\underline{\Omega}}$

$\rightarrow$ Eigenfrequenzen: $\pm\omega^{(k)}$

EV: $\underline{e}^{(k)}$ mit $\underline{e}^{(k)} \cdot \underline{e}^{(l)} = \delta_{kl}$

$$\rightarrow \text{ reelle Lsg: } \quad \boxed{\underline{y}^{(k)}(t) = a^{(k)}\, \underline{e}^{(k)} \cos\left(\omega^{(k)} t - \varphi^{(k)}\right)} \qquad (11.15)$$

... Eigen-/Normalschwingung/Eigenmode

Amplitude — charakt. kollekt. Schwingung — Phase

- allg. Lsg. von (11.10.):

Superpositionsprinzip:

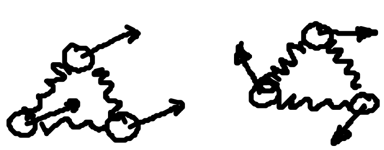
$$\boxed{\underline{y} = \sum_{k=1}^{f=3N} \underline{y}^{(k)}(t) = \sum_{k=1}^{f} a^{(k)}\, \underline{e}^{(k)} \cos\left(\omega^{(k)} t - \varphi^{(k)}\right)} \qquad (11.16)$$

- **Bemerkungen**

(1) in (11.10) enthalten: 3 Translationen : $\underline{r}_\nu(t) = \underline{v}\, t + \underline{r}_{\nu 0}$

Gesamtkraft = Null

3 Rotationen



$$\boxed{\omega^{(k)} = 0, \qquad k = 1, \dots, 6} \qquad (11.17)$$

(2) Entartung:

$$\boxed{\omega^{(k)} = \omega^{(l)}, \quad k \neq l} \qquad (11.18)$$

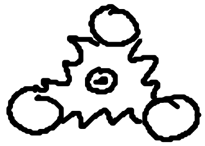
Bsp: 2fache Entartung $\rightarrow$ Lsgraum:

Superposition aus: $\left[a_\pm^{(k)}\, \underline{e}^{(k)} + a_\pm^{(l)}\, \underline{e}^{(l)}\right] \begin{matrix} \cos\omega^{(k)} t \\ \sin\omega^{(k)} t \end{matrix}$

(i) zufällige Entartung

(ii) aufgrund von Symmetrien

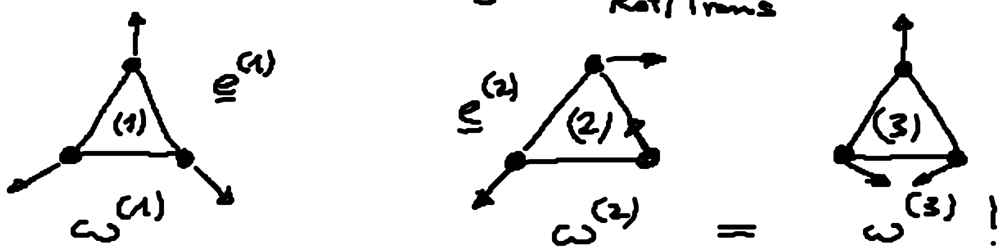
(3) Bsp:



3-zählige Symmetrie um ⊙

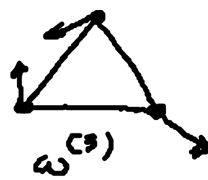
[Drehung um 120°: Molekül geht in sich über]

Gruppentheorie $\longrightarrow$ $3 = \underbrace{9}_{f=3\times 3} - \underbrace{6}_{\text{Rot/Trans}}$ Eigenschwingungen: [o.B.]



keine Schwerpunkts-bewegung

Komb. ergibt z.B.:



≙ (3) um 120° gedreht

$$\boxed{\text{Symmetrien \& Gruppentheorie} \longrightarrow \text{Eigenmoden}}$$

• Normalkoordinaten

$\{\underline{e}^{(1)} \dots \underline{e}^{(3N)}\}$ … vollständige ONB im $\mathbb{R}^{3N}$

allg. Lsg:
$$\boxed{\begin{aligned} \underline{y}(t) &= \sum_{k=1}^{3N} q^{(k)}(t)\, \underline{e}^{(k)} \\ \text{mit } q^{(k)}(t) &= \underline{y} \cdot \underline{e}^{(k)} \end{aligned}} \quad (11.19)$$

• Dgl. für $q^{(k)}(t)$?

$$\underline{e}^{(k)} \cdot \Big| \; \ddot{\underline{y}} + \underline{\underline{\Omega}}\, \underline{y} = 0 \quad (11.10)$$

mit (11.19)
$$\ddot{q}^{(k)} + \underline{e}^{(k)} \cdot \sum_{\ell} \underbrace{\underline{\underline{\Omega}}\, \underline{e}^{(\ell)}}_{[\omega^{(\ell)}]^2 \underline{e}^{(\ell)}} q^{(\ell)}(t) = 0$$

$$\xrightarrow{\underline{e}^{(k)} \cdot \underline{e}^{(\ell)} = \delta_{k\ell}} \quad \boxed{\ddot{q}^{(k)} + [\omega^{(k)}]^2 q^{(k)} = 0} \quad (11.20)$$

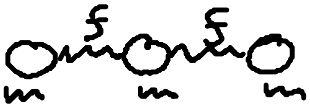
also: Eigenschwingungen

$\hat{=}$ $f = 3N$ entkoppelte harm. Oszillatoren der Frequenzen $\omega^{(k)}$

Lsg: $$\boxed{q^{(k)}(t) = a^{(k)} \cos(\omega^{(k)} t - \varphi^{(k)})} \quad (11.21)$$

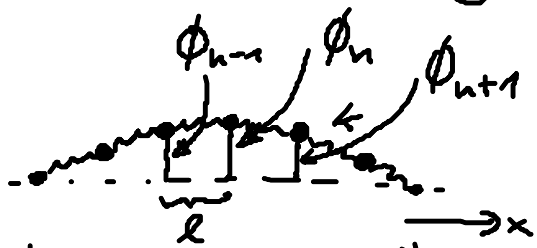
[vgl. (11.15)]

- Bsp: [Übungen]



11.4. Schwingende Saite: Wellengleichung

- **Modell**:



Gesamtl. $L = (N-1)\ell$

N … Massepkte gekoppelt mit nächsten Nachbarn

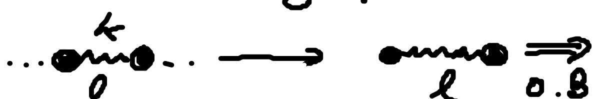
ϕ_n … transv. Auslenkung des n-ten Massenpktes

- Newton für den n-ten Massenpkt:

$$m \ddot{\phi}_n = -f(\phi_n - \phi_{n-1}) - f(\phi_n - \phi_{n+1}) \quad (11.22)$$

harm. Näherg

f? Saite vorgespannt (11.23)



$$f \approx k\left(1 - \frac{\ell_0}{\ell}\right)$$

- Kontinuumsübergang zur massebelegten Saite:

$$\ell = \Delta x \longrightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty$$

$$\phi_n(t) \longrightarrow \phi(x,t) \quad \text{… Feldvariable}$$

dist. Index — kont. Ortsvariable

also: $$\phi_{n\pm1} - \phi_n \longrightarrow \phi(x \pm \Delta x) - \phi(x) \overset{\text{Taylor}}{=} \pm \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Delta x^2 + \dots$$

$$\longrightarrow \text{r.S. von (11.22)}: \quad f \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Delta x^2 \quad (1)$$

L.S. " " : $m\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$ (2)

(11.23b)

sammle Koeff.: $\underbrace{\frac{\Delta x}{m}}_{\frac{1}{\rho}}$ $\underbrace{f\Delta x}_{(11.23),\ \Delta x=\ell}$ $k(\Delta x-\Delta x_0) = \sigma$ $\xrightarrow{\Delta x\to 0}$ $\boxed{c^2=\frac{\sigma}{\rho} = \frac{\text{Zugkraft}}{\text{Linien-Massendichte}}}$

c ... Wellengeschw.

$$\xrightarrow[(11.23b)]{(1)=(2)} \boxed{\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\phi(x,t)=0} \quad (11.24)$$

... Wellengl. für Feldamplitude ϕ

[N Dgl. (11.22) $\longrightarrow$ part. Dgl.]

• allg. Lsg. der Wellengl.

neue Variablen: $x-ct=\xi$, $x+ct=\eta$ $\longrightarrow$ $\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}$, $\frac{\partial}{\partial ct}=-\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}$ (11.25)

berechne: $\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=4\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\eta}$ (11.26)

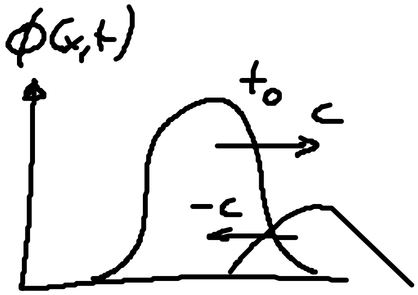
... „Wellenoperator" aus (11.24)

$$(11.24) \xrightarrow[\text{Variable}]{\text{neue}} \boxed{\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\xi}\phi(\xi,\eta)=0} \quad (11.27)$$

allg. Lsg: $\phi(\xi,\eta)=\underbrace{f(\xi)}+\underbrace{g(\eta)}_{\text{beliebige Fkt.}} = \underbrace{\underline{f(x-ct)}+\underline{g(x+ct)}}$

laufen „forminvariant" nach rechts/links mit Geschw. c

$\hat{=}$ keine Dispersion



· <u>Normalschwingungen</u>

Ansatz: ebene Welle $\phi(x,t) = a\, e^{i(kx-\omega t)}$ $\quad \boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi = 0 \qquad \boxed{\begin{array}{l} \omega \ldots \text{Kreisfrequenz} \\ k \ldots \text{Wellenzahl} \end{array}} \qquad (11.28)$$

in (11.24): $\left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2\right)\phi = 0 \longrightarrow \boxed{\omega = \pm c k}$ (11.29)

… Dispersionsrelation $\omega = \omega(k)$ (11.30)

Normalschw.

$$\longrightarrow \boxed{\phi_k(x,t) \sim \begin{array}{ll} e^{ik(x-ct)} & \ldots \text{nach rechts} \\ e^{ik(x+ct)} & \ldots \text{nach links} \end{array} \text{ laufende Welle}}$$

, Wellenzahl k ersetzt diskreten Index $k = 1 \ldots 3N$ von Kap. 11.3

· <u>allg. Lsg. der Wellengl.</u>

Superpositionsprinzip: (11.31)

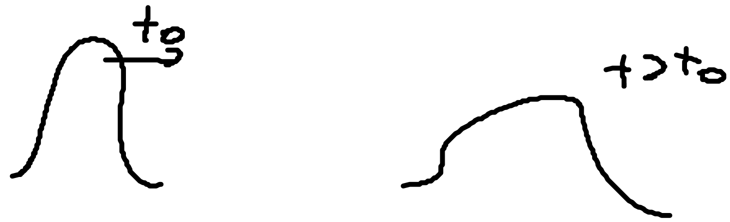
$$\boxed{\phi(x,t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, a(k)\, e^{ik(x-ct)}}\ + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, b(k)\, e^{ik(x+ct)}}}$$

Fourier-Integral eines nach <u>rechts</u> / <u>links</u>
Darstellung
laufenden Wellenpakets <u>$f(x-ct)$</u> / <u>$g(x+ct)$</u>

$$\phi(x,t) \text{ reell} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} a(-k) = a^*(k) \\ b(-k) = b^*(k) \end{array}} \quad (11.32)$$

· Wellen mit Dispersion: $\boxed{c = c(k)}$ $\quad c = \frac{\omega(k)}{k}$ … Phasengeschw. einer Welle. (11.33)

Annahme: $c = c(k)$ in Wellenpaket (11.31)
$\longrightarrow$ Paket zerfließt



Bsp: a) EM-Wellen im Medium; Glasfaser!

b) QM: Wellen eines freien Teilchens

z.B.: $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m} \longrightarrow c = \frac{\hbar k}{2m}$

- eingespannte Saite: s. Übungen