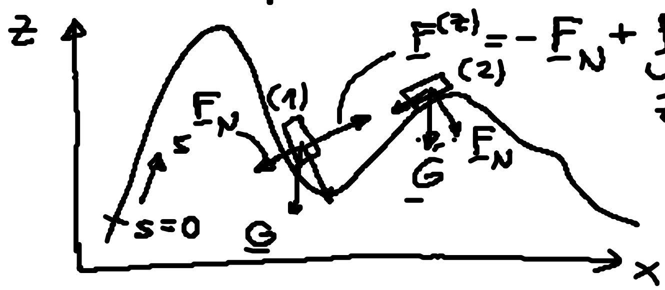
III. Analytische Mechanik

- Motivation:
  (i) Formalisierung der Newtonschen Mechanik
  (ii) "elegantere" Lsgs. wege für mechan. Probleme
  $\longrightarrow$ Zwangsbed.
  $\longrightarrow$ Zwangskräfte } Ingenieurwissenschaften
  (iii) Formulierung der Quantenmechanik
  (iv) Grundprinzipien zur Erfindung und Formulierung
  (1) elementarer Wechselw. in der Natur
  $\longrightarrow$ Integralprinzipien
  $\longrightarrow$ Extremal "
  (2) komplexer Materialien

- Lit: (i) Goldstein
  (ii) Sommerfeld
  (iii) Nolting

- illustrierendes Bsp: zu (ii): Achterbahn



- festgelegte 1D-Bahn in xz-Ebene: $z = z(x)$ (*) ... Zwangsbed.
- generalisierte Koord. zur Zeit t: z.B. $x(t) \xrightarrow{(*)} z(t) = z(x(t))$
  z.B. $s(t) \xrightarrow{(*)} x(t),\ z(t)$
- Zwangskräfte $\underline{F}^{(z)}$ [von Schiene auf den Wagen]
  zwingen Wagen auf 1D-Bahn
- in (2): Wagen hebt <u>nicht</u> ab für: $|\underline{F}_p| \leq |\underline{F}_N|$

} konstruierender Ingenieur!

- Def: (12.1)

$\boxed{\text{Zwangsbedingungen: beschreiben eingeschränkte Bewegung von Massepunkten. Zwangskräfte: verursachen " " "}}$

12. Lagrangesche Gleichungen

- Erinnerung: System von N Massepktn.

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i$$

$$= \underbrace{\underline{F}_i^{(a)}}_{\text{äußere}} + \underbrace{\sum_j \underline{F}_{ij}}_{\text{innere Kräfte}} \qquad (8.1)$$

hier: $$m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underbrace{\underline{F}_i^{(t)}}_{\text{treibende Kräfte}} + \underbrace{\underline{F}_i^{(z)}}_{\text{Zwangs-kräfte}} \qquad (12.1)$$

NB: $\underbrace{i,j}_{\text{ersetzt } \nu,\mu \text{ (vgl. Kap. 8)}} = 1 \ldots N$

- Problem: $\underline{F}_i^{(z)}$ unbekannt

Ziel: (i) Bestimme "eingeschränkte" Bewegung ohne Kenntnis von $\underline{F}_i^{(z)}$ $\longrightarrow$ Physiker

(ii) Berechne auch $\underline{F}_i^{(z)}$ $\longrightarrow$ Ingenieure

- Zahl f der mechan. Freiheitsgrade:

$$\boxed{f = 3N - Z} \qquad (12.2)$$

f (generalisierten) — 3N Lage-koord. (z.B. kartesisch) — Zahl der Zwangsbed.

Koord.:
beschreiben Lage
der N Massenpkte.
eindeutig

12.1 Zwangsbedingungen & generalisierte Koord.

(i) holonome Zwangsbed. (griech: holos = ganz, integrabel)

- integrale Darstellung:

Bindungsgl.: $$\boxed{\phi^{(\nu)}(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_N, t) = 0 \qquad \nu = 1, 2, \dots Z} \tag{12.3}$$

... verknüpft 3N Ortskoord.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial \phi^{(\nu)}}{\partial t} = 0 & \dots \text{ skleronom} \\ \dfrac{\partial \phi^{(\nu)}}{\partial t} \neq 0 & \dots \text{ rheonom} \end{array}}$$

- generalisierte Koord.: $q_1, \dots, q_f$

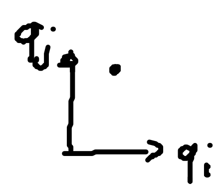
(i) mit
$$\begin{aligned} \underline{r}_1 &= \underline{r}_1(q_1, \dots, q_f, t) \\ &\vdots \\ \underline{r}_N &= \underline{r}_N(q_1, \dots q_f, t) \end{aligned} \tag{12.4}$$

(ii) erfüllen über (12.4) (12.3) $\forall q_1 \dots q_f, t$

"sind unabh. voneinander"

(iii) beschreiben Zustand eindeutig

(iv) spannen Konfigurationsraum auf

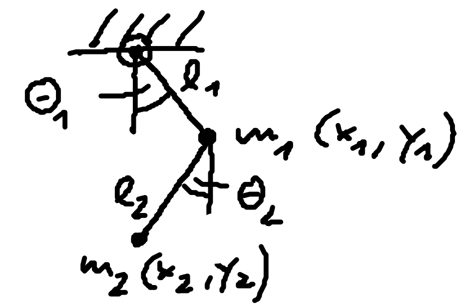


(v) "nicht eindeutig"

- Bsp: (1) Achterbahn: $\phi^{(1)} = z - z(x) = 0$

$q_1 = x$ oder s

(2) Doppelpendel:

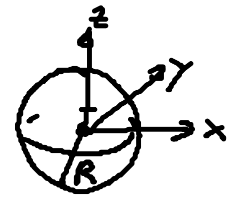


$$\phi^{(1)} = x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0$$

$$\phi^{(2)} = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0$$

$$q_1 = \Theta_1, \quad q_2 = \Theta_2$$

(3) Bewegung auf Kugeloberfl.



$$\phi^{(1)} = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

$q_1 = \vartheta$, $q_2 = \varphi$ … Kugelkoord.

(4) starrer Körper: $\phi^{(ij)} = (\underline{r}_i - \underline{r}_j)^2 - d_{ij}^2 = 0 \quad \forall\, ij$

• differentielle Darstellung: mit $\underline{r}_k = (x_k, y_k, z_k)$
$= (x_{k1}, x_{k2}, x_{k3})$

führe ein: $$\underline{\Phi}_k^{(\nu)} = \Big(\underbrace{\frac{\partial \phi^{(\nu)}}{\partial x_{k1}}}_{\Phi_{k1}^{(\nu)}}, \frac{\partial \phi^{(\nu)}}{\partial x_{k2}}, \frac{\partial \phi^{(\nu)}}{\partial x_{k3}}\Big) \qquad (12.5)$$

… … Komp: $\Phi_{k\alpha}^{(\nu)}$, $\alpha = 1,2,3$

differentielle Verrückungen der $\underline{r}_k$ um $d\underline{r}_k$, $k = 1 \ldots N$

müssen erfüllen: $\phi^{(\nu)}(\underline{r}_1 + d\underline{r}_1, \ldots) = 0$

$$\longrightarrow \boxed{d\phi^{(\nu)} = \sum_k \underline{\Phi}_k^{(\nu)} \cdot d\underline{r}_k = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{3} \Phi_{k\alpha}^{(\nu)}\, dx_{k\alpha} = 0} \qquad (12.6)$$

$\nu = 1 \ldots Z$

$[\phi^{(\nu)}(\underline{r}_1 + d\underline{r}_1, \ldots) - \phi^{(\nu)}(\underline{r}_1, \ldots,)]$

Beachte: $$\frac{\partial^2 \phi^{(\nu)}}{\partial x_{i\alpha} \partial x_{k\beta}} = \boxed{\frac{\partial \Phi_{k\beta}^{(\nu)}}{\partial x_{i\alpha}} = \frac{\partial \Phi_{i\alpha}^{(\nu)}}{\partial x_{k\beta}}} = \frac{\partial^2 \phi^{(\nu)}}{\partial x_{k\beta} \partial x_{i\alpha}} \qquad (12.7)$$

... Integrabilitätsbed.!

Geg: $\Phi_k^{(\nu)}$ mit (12.7) $\longrightarrow$ $\Phi^{(\nu)}$ existiert

$$\left[\text{vgl. } \underline{F},\ \underbrace{\mathrm{rot}\,\underline{F}=0}_{\frac{\partial F_2}{\partial x_3}-\frac{\partial F_3}{\partial x_2}=0\ !!} \longrightarrow \underline{F}=\mathrm{grad}\,U\right]$$

(ii) <u>anholonome Zwangsbed.</u>: $\Phi^{(\nu)}(\ldots)=0$ existiert <u>nicht</u>

„nicht integrierbar" = anholonom

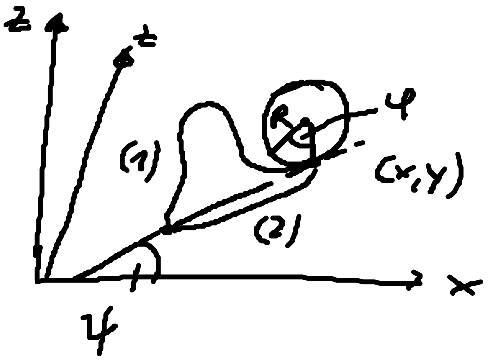
(1) Ungleichungen

Bsp: Bewegung außerhalb Kugel: $x^2+y^2+z^2-R^2\geq 0$

(2) <u>nur Einschränkung der Verrückung im Infinitesimalen</u>:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} \Phi_k^{(\nu)}\cdot d\underline{r}_k = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{\partial \Phi_{k\beta}^{(\nu)}}{\partial x_{i\alpha}} \neq \frac{\partial \Phi_{i\alpha}^{(\nu)}}{\partial x_{k\beta}}} \qquad (12.8)$$

Bsp: Abrollen einer Scheibe <u>ohne</u> „Schlupf"



Konfig. der Scheibe:

Auflagepkt: x, y

Orientierung: ψ

Drehwinkel: φ

NB $\underline{r}_k \longrightarrow x, y, \psi, \varphi$

(i) holonome Zwangsbed.: $\varphi = \varphi(x,y)$

nein: Wege (1), (2) $\longrightarrow$ φ ist wegabhängig!

(ii) anholonome Zwangsbed.:

Geschw. Scheibe: $v = R\dot{\varphi} \longrightarrow$ $ds = R\, d\varphi \quad (*)$

$dx = ds \cos\psi \; (1')$

$dy = ds \sin\psi \; (2')$

$(1') \xrightarrow{(*)} 1\, dx - R\cos\psi\, d\varphi = 0 \quad (1)$

$(2') \xrightarrow{(*)} 1\, dy - R\sin\psi\, d\varphi = 0 \quad (2)$

vgl. mit (12.8): $\phi_x^{(1)} = 1,\ \phi_y^{(1)} = 0,\ \phi_\varphi^{(1)} = -R\cos\psi$

$\phi_\psi^{(1)} = 0$

Integrabilität?

$$\frac{\partial \phi_\varphi^{(1)}}{\partial \psi} = R\sin\psi \neq \frac{\partial \phi_\psi^{(1)}}{\partial \varphi} = 0$$

$\longrightarrow$ <u>kein</u> $\phi^{(1)}(x, y, \varphi, \psi) = 0$!