# III Analytische Mechanik

## 12. Lagrangesche Gleichungen

### 12.1. Zwangsbedingungen & generalisierte Koord.

### 12.2. Das Prinzip der virtuellen Arbeit

- hier: Statik, auch für Dynamik gültig
- Unterscheide:

$\boxed{\begin{array}{lll} d\underline{r}_i & \text{... reale infinitesimale Verrückung,} & dt \neq 0 \\ \delta\underline{r}_i & \text{... virtuelle " " ,} & \delta t = 0 \\ & \text{verträglich mit den Zwangsbed.} & \end{array}}$

wichtig für $\dfrac{\partial \phi^{(\mu)}(\dots)}{\partial t} \neq 0$ (12.9)

- System im GG:

(12.1) $\longrightarrow$ $\underline{F}_i = \underline{F}_i^{(e)} + \underline{F}_i^{(z)} = 0, \quad i = 1, \dots N$

$\longrightarrow$ <u>virtuelle Arbeit</u> durch $\delta\underline{r}_i$:

$$\delta A = \sum_i \underline{F}_i \cdot \delta\underline{r}_i = \sum_i \underline{F}_i^{(e)} \cdot \delta\underline{r}_i + \sum_i \underline{F}_i^{(z)} \cdot \delta\underline{r}_i = 0 \qquad (12.10)$$

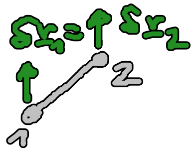
- Sommerfeld:

Postulat: „Bei jedem glatt geführten mechan. System ist die virtuelle Arbeit der Zwangskräfte gleich Null.“ $\sum_i \underline{F}_i^{(z)} \cdot \delta\underline{r}_i = 0$ (12.11)

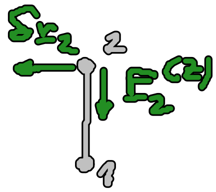
Goldstein: Beschränkung auf Systeme mit (12.11)

- <u>Bsp</u>: (i) starrer Körper:


$\underline{F}_1^{(z)} = \underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21} = -\underline{F}_2^{(z)}$ (actio = reactio)

(1) Translation 


(12.11) $\longrightarrow$ $\underline{F}_1^{(z)}\cdot\delta\underline{r}_1 + \underline{F}_2^{(z)}\cdot\delta\underline{r}_2 = \underbrace{(\underline{F}_1^{(z)}+\underline{F}_2^{(z)})}_{=0}\cdot\delta\underline{r}_1 = 0$

(2) Rotation: 


$\underline{F}_2^{(z)}\cdot\delta\underline{r}_2 = 0$, $\underline{F}_2^{(z)}\perp\delta\underline{r}_2$

(ii) Achterbahn: $\underline{F}^{(z)}\perp\delta r$

• also: Prinzip der virtuellen Arbeit

(12.10) mit (12.11) $\longrightarrow$ $\boxed{\sum_i \underline{F}_i^{(t)}\cdot\delta\underline{r}_i = 0}$ (12.12)

... virtuelle Arbeit der „treibenden Kräfte" verschwindet

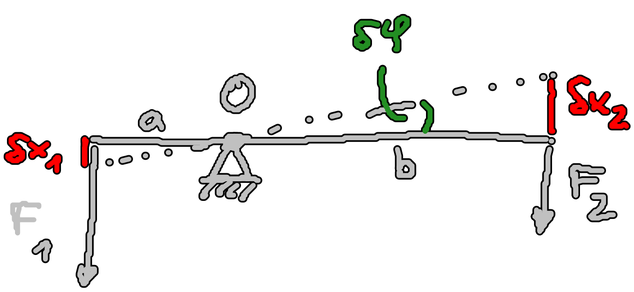
• Bemerkungen:

(i) (12.12) bestimmt gesamte Statik!

(ii) Haftreibungskräfte = $\underline{F}^{(z)}$

Gleit " " = $\underline{F}^{(t)}$

• Bsp: Hebel




GG? (12.12)

$F_1 \underset{a\delta\varphi}{\delta x_1} + F_2 \underset{-b\delta\varphi}{\delta x_2} = 0$

$\rightarrow (F_1 a - F_2 b)\delta\varphi = 0$

$F_1 a = F_2 b$ (12.13)

= GG der Drehmomente um O ✓

# 12.3. Das d'Alembertsche Prinzip

• Ziel: erweitere (12.12) auf die Dynamik

• „Kunstgriff"

Newton: $\underline{F}_i^{(t)} + \underline{F}_i^{(z)} = \boxed{m_i \ddot{\underline{r}}_i =: -\underline{F}^*}$

… d'Alembertsche Trägheitskraft/-widerstand

(i) fiktive Kraft!

(ii) Scheinkräfte [vgl (7.3)]

$\longrightarrow$ Zentrifugalkräfte (Achterbahn!)

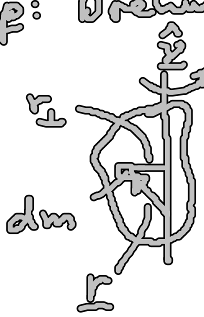
• virtuelle Arbeit:

$$\sum_i \underbrace{(\underline{F}_i - m_i \ddot{\underline{r}}_i)}_{0} \cdot \delta \underline{r}_i = 0 \quad \& \quad \sum_i \underline{F}_i^{(z)} \cdot \delta \underline{r}_i = 0$$

$$\xrightarrow[\underline{F}_i = \underline{F}_i^{(t)} + \underline{F}^{(z)}]{} \quad \boxed{\sum_i \left(\underline{F}_i^{(t)} - m_i \ddot{\underline{r}}_i\right) \cdot \delta \underline{r}_i = 0} \quad (12.15)$$

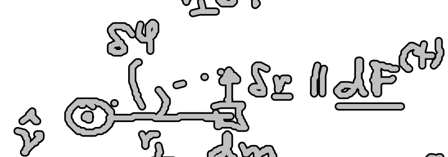
… d'Alembertsches Prinzip (Differentialprinzip)

• Bsp: Drehung eines starren Körpers um feste Achse:




i.A. $\sum_i \to \int dm$

(1) $$\int \underbrace{d\underline{F}^{(t)} \cdot \delta \underline{r}}_{\substack{d\underline{F}^{(t)} \parallel \delta \underline{r} \\ \text{Rest } d\underline{F}^{(z)}}} = \int dF^{(t)} \underbrace{\delta r}_{r_\perp \delta\varphi} = D^{(t)} \delta\varphi$$




ges. treibendes Drehmoment

(2) $$\int dm\, \ddot{\underline{r}} \cdot \delta \underline{r} = \int dm\, \dot{v}\, \underbrace{\delta r}_{r_\perp \delta\varphi} = \delta\varphi\, \dot\omega\, \Theta$$

Zentrifugalkraft $\perp \delta \underline{r}$, fällt weg

$\dot v = r_\perp \dot\omega$

mit $\boxed{\Theta = \int dm\, r_\perp^2 \overset{(10.25)}{=} \hat{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{\Theta}}\, \hat{\underline{v}}}$

... Trägheitsmoment um Achse $\hat{\underline{\nu}}$ (12.16)

$(12.15) \longrightarrow (1)-(2)=0$

$\longrightarrow (D^{(t)} - \Theta\dot{\omega})\delta\varphi = 0$

$\longrightarrow \boxed{D^{(t)} = \Theta\dot{\omega}}$ (12.17) $\qquad \underline{L} = \underline{\Theta}\,\underline{\omega}$

$\underline{D}\cdot\hat{\underline{\nu}} \qquad \dot{\underline{L}}\cdot\hat{\underline{\nu}}$

also: Zwangsdrehmomente $\underline{D}^{(z)} \perp \hat{\underline{\nu}}$ wegen $\underline{L} \parallel \hat{\underline{\nu}}$ treten hier nicht auf.

[vgl. Kap. 10.3 ff): $\underline{D}^{(z)}$ ... durch Lagerkräfte]

## 12.4. Lagrangesche Gln. 1. Art

- d'Alembert $\longrightarrow$ DGln. für $\underline{r}_k$ & Zugang zu Zwangskräften
- Es galt: (1) $\sum_{k=1}^{N} (\underline{F}_k^{(t)} - m\ddot{\underline{r}}_k)\cdot\delta\underline{r}_k = 0$ (12.15)

(2) $\sum_{k=1}^{N} \underline{\Phi}_k^{(\nu)}\cdot\delta\underline{r}_k = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots z$ (12.5)

$\delta\underline{r}_k$ mit Komp. $\delta x_{k\alpha}$, $\alpha = 1,2,3$

also: von 3N Verrückungen $\delta x_{k\alpha}$ sind nur $f = 3N - z$ unabhängig

- Methode der Lagrangesche Multiplikatoren $\lambda_\nu$:

$(1) + \sum_{\nu=1}^{z} \lambda_\nu \,(2) = 0$

beliebiger Faktor $\lambda_\nu(t)$

$$\longrightarrow \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\Big(\underline{F}_k^{(t)} - m\ddot{\underline{r}}_k + \sum_{\nu=1}^{z}\lambda_\nu \underline{\Phi}_k^{(\nu)}\Big)}_{\underline{V}_k \text{ mit Komp. } V_{k\alpha},\ \alpha=1,2,3}\cdot\delta\underline{r}_k = 0 \quad (12.18)$$

(i) Wähle für z Verrückungen $\delta x_{k\alpha}$ die $\lambda_\nu(t)$ so, daß

$V_{k\alpha} = 0$

(ii) die restlichen $3N-z$ Verrückungen $\delta x_{\ell\beta}$ sind frei wählbar: (12.18) $\longrightarrow$ $V_{\ell\beta} = 0$

$$\longrightarrow \boxed{m \ddot{\underline{r}}_k = \underline{F}_k^{(t)} + \sum_{\nu=1}^{z} \lambda_\nu \underline{\Phi}_k^{(\nu)} \qquad k = 1, \ldots, N} \qquad (12.19)$$

... Lagrangesche Gln. 1. Art

$$\& \quad \boxed{\sum_{k=1}^{N} \underline{\Phi}_k^{(\nu)} \cdot \dot{\underline{r}}_k = 0 \quad , \quad \nu = 1, \ldots z} \qquad (12.20)$$

... Bindungsglн. $[\hat{=} (12.6)$ mit $\delta \underline{r}_k \to \dot{\underline{r}}_k]$

also: $3N+z$ DGln für $3N+z$ Variable $\underline{r}_k, \lambda_\nu$

- Lösungsweg:
  (1) Bestimme $z$ Multiplikatoren $\lambda_\nu$ aus $z$ Gln. von (12.19)
  (2) Einsetzen der $\lambda_\nu$ in restl. $3N-z$ Gln. & $z$ Gln. von (12.20)

$\longrightarrow$ $3N$ DGln. für $\underline{r}_k$

- Zwangskräfte: vgl. (12.19) mit $m \ddot{\underline{r}}_k = \underline{F}_k^{(t)} + \underline{F}_k^{(z)}$ (12.1)

$$\longrightarrow \boxed{\underline{F}_k^{(z)} = \sum_{\nu=1}^{z} \lambda_\nu \underline{\Phi}_k^{(\nu)} \quad , k = 1, \ldots, N} \qquad (12.21)$$

also: $\lambda_\nu(t) \longrightarrow \underline{F}_k^{(z)}$ !