13.2 Eulersche Variationsrechnung

- 1D-Fall: Variationsproblem

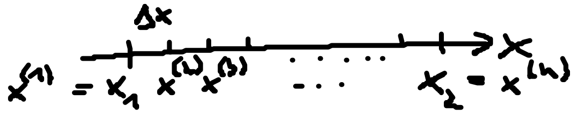
Geg: Funktion $y(x)$

Funktional $F[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \underbrace{y'}_{\frac{dy}{dx}}, x)\,dx$

... ordnet $y(x)$ eine Zahl zu!

Ges: $y(x)$, so daß $F[y(x)]$ extremal für feste $y(x_1), y(x_2)$

- diskretisierte Version: (i) zur Verdeutlichung
  (ii) Vorgehen in der Numerik



... Stützstellen

$$y(x^{(i)}) \longrightarrow y_i$$

$$y'(x^{(i)}) \longrightarrow \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}$$

$$dx \longrightarrow \Delta x$$

$$\int \longrightarrow \sum_i$$

$$F[y(x)] \longrightarrow \bar{F}(y_1, \dots, y_n)$$

Variation von $\bar{F}$: $\delta \bar{F} = \bar{F}(y_1+\delta y_1, \dots, y_n+\delta y_n) - \bar{F}(y_1, \dots, y_n)$

$$\overset{\text{Taylor}}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{F}}{\partial y_i}\delta y_i + O(\delta y_i^2) \qquad (13.5)$$

Extremum von $\bar{F}$: $\delta \bar{F} = 0$, beliebiges $\delta y_i \longleftrightarrow \frac{\partial \bar{F}}{\partial y_i} = 0$ (13.6)

(auch Sattelpkt)

(„horizontale" Tangente)

- kontinuierliche Version:

Variation von F:
$$\boxed{\begin{aligned}\delta F &= F[y(x)+\delta y(x)] - F[y(x)] \\ &\overset{!}{=} \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\frac{\delta F}{\delta y(x)}}_{\text{„Funktionalableitung"}} \delta y(x)\, dx\end{aligned}} \quad (13.7)$$

Vgl. mit (13.5):

(i) $\sum_i \longrightarrow \int \dots dx$

(ii) $\frac{\partial F}{\partial y_i} \longrightarrow \frac{\delta F}{\delta y(x)}$!

Extremum von F:
$$\boxed{\begin{aligned}&\delta F = 0, \quad \text{beliebiges } \delta y(x) \\ &\quad\longrightarrow \frac{\delta F}{\delta y(x)} = 0\end{aligned}} \quad (13.8)$$

$\longrightarrow$ Ges: $\frac{\delta F}{\delta y(x)}$!

- Durchführung der Variation für (13.4): $F = \int_{x_1}^{x_2} f(\overset{y(x)}{y}, y', x)\, dx$

$$\begin{aligned}\delta F &= \delta \int_{x_1}^{x_2} f(y(x)), y'(x), x)\, dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \delta f\big(y(x), y'(x), x\big)\, dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\delta y(x) + \underline{\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'}\right] dx \quad (13.9) \quad [\delta x = 0!]\end{aligned}$$

wichtige Schritte:

(i)
$$\begin{aligned}\delta y' &= \delta\, \frac{y(x+\varepsilon) - y(x)}{\varepsilon} \qquad \Big[\lim_{\varepsilon\to 0}(\dots)\Big] \\ &= \frac{\delta y(x+\varepsilon) - \delta y(x)}{\varepsilon}\end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon\to 0} \boxed{\delta y' = \frac{d}{dx}\,\delta y(x)} \quad (13.10)$$

(ii) (13.10) in (13.9) (2. Term)

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \delta y(x)\, dx$$

$$\underset{\underline{\text{Euler}}}{\overset{\underline{\text{part. Integ}}}{=}} \int_{x_1}^{x_2} \Big\{ \underbrace{\frac{d}{dx}\Big[\frac{\partial f}{\partial y'} \delta y(x)\Big]}_{\frac{\partial f}{\partial y'} \delta y(x)\Big|_{x_1}^{x_2} = 0} - \underline{\frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial f}{\partial y'}\Big) \delta y(x)} \Big\}\, dx \quad !!!! \qquad (13.11)$$

weil $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$

$$\longrightarrow \delta F \overset{(13.11)}{=} \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\Big[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\Big]}_{\frac{\delta F}{\delta y(x)}} \delta y(x)\, dx \qquad (13.12)$$

$\underline{\text{vgl. mit}}$ (13.7)

$$\underline{\boxed{\frac{\delta F}{\delta y(x)} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}}} \qquad (13.13)$$

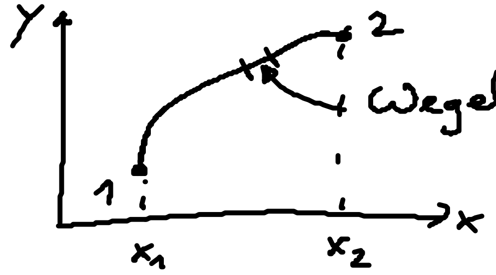
$$\boxed{\delta F = 0 \longleftrightarrow \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0} \qquad (13.14)$$

... Euler-Lagrange-Gl.
des Variationsproblems

- **Bsp:**

1. Geodäten = Kurven mit kürzestem Abstand zwischen 2 Pktn.

a) Ebene:



Wegelement $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$

$$= dx\sqrt{1+\underbrace{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}_{(y')^2}} \quad (13.15)$$

- Minimiere: $L = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\sqrt{1+(y')^2}}_{\ell}\, dx$

$$\delta L = 0 \xrightarrow[(13.14)]{} \frac{d}{dx}\frac{\partial \ell}{\partial y'} - \underbrace{\frac{\partial \ell}{\partial y}}_{=0} = 0$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = 0 \longrightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = \text{konst.}$$

$$\longrightarrow y' = c_1 \longrightarrow \boxed{y = c_1 x + c_2}$$

... Gerade ✓

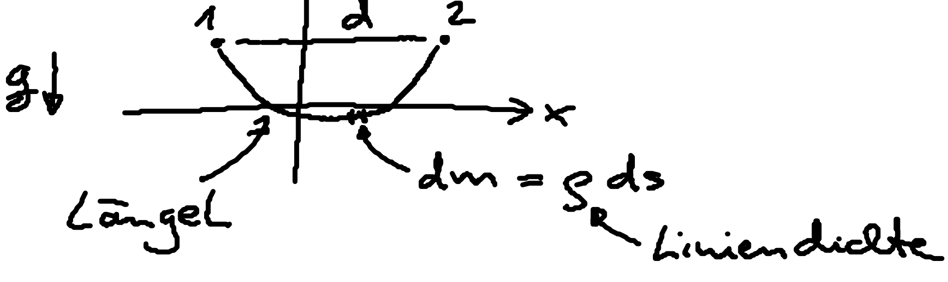
b) Kugel: ⟶ Großkreise [„Übungen"]

Anw.: Routen von Flugzeugen

c) ART: Geodäten = Bahnkurven von Massepktn. in gekrümmter 4D Raumzeit!

2. Kettenlinie = Katenoide:

= Form einer massenbelegten Kette im homogenen Grav. feld



– Minimiere potentielle Energie:

$$U = g\int_1^2 dm\; z(x)$$

mit $dm = \varrho\, ds = \varrho\, dx\sqrt{1+(z')^2}$

$$\longrightarrow \quad U = g\varrho\int_{x_1}^{x_2} \underbrace{z(x)\sqrt{1+(z')^2}}_{u}\, dx$$

$$\delta U = 0 \xrightarrow[(13.14)]{} \frac{d}{dx}\frac{\partial u}{\partial z'} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} \quad z z'' - (z')^2 = 1$$

$\cosh x = \frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$

[Hinweis: $(\cosh x)' = \sinh x$

$(\sinh x)' = \cosh x$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$!]

$$\boxed{z(x) = a\cosh\frac{x-x_0}{a}} \quad (13.16)$$

... Kettenlinie

– Nebenbedingung: $L = \int_1^2 ds$ mit $ds = \sqrt{1+(z')^2}\, dx$

$$= \sqrt{1+\sinh^2\frac{x-x_0}{a}}\, dx$$

$$= \cosh\frac{x-x_0}{a}\, dx$$

$$\longrightarrow \quad L = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \cosh\frac{x-x_0}{a}\, d(x-x_0)$$

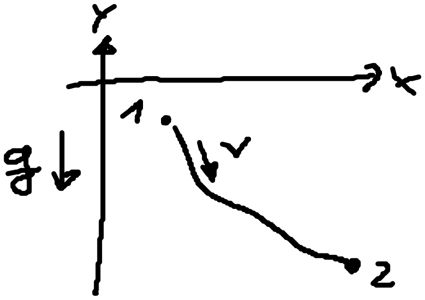
$$= a\sinh\frac{x-x_0}{a}\Big|_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}$$

$$\boxed{\frac{L}{2a} = \sinh\frac{d}{2a}} \quad (13.17)$$

Geg: $L, d \longrightarrow a$!

3. Brachistochronen-Problem: Kurve, auf der ein Teilchen in kürzester Zeit im homog. Grav.feld

zwischen 2 Pktn. fällt



Minimiere:

$$T = \int_1^2 \frac{ds}{v} \quad (13.18)$$

[Übungen]

13.3 Euler-Lagrangesche Gln. 2. Art