

13.2 Eulersche Variationsrechnung

• 1D-Fall: Variationsproblem

Geg: Funktion $y(x)$

$$\text{Funktional } F[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx$$

... ordnet $y(x)$ eine Zahl zu!

Ges: $y(x)$, so daß $F[y(x)]$ extremal für feste $y(x_1), y(x_2)$

• die kritisierte Version: (i) zur Veranschaulichung
(ii) Vorgehen in der Numerik

$$x_1 \xrightarrow{\Delta x} x_1^{(1)} \quad x_1^{(2)} \quad \dots \quad x_2^{(n)} = x_2 \quad \dots \text{Stützstellen}$$

$$\begin{aligned} y(x^{(i)}) &\longrightarrow y_i \\ y'(x^{(i)}) &\longrightarrow \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \\ dx &\longrightarrow \Delta x \end{aligned}$$

$$\int \longrightarrow \sum_i$$

$$F[y(x)] \longrightarrow \bar{F}(y_1, \dots, y_n)$$

$$\begin{aligned} \text{Variation von } \bar{F}: \quad \delta \bar{F} &= F(y_1 + \delta y_1, \dots, y_n + \delta y_n) - F(y_1, \dots, y_n) \\ &\stackrel{\text{Taylor}}{\approx} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{F}}{\partial y_i} \delta y_i + O(\delta y_i^2) \quad (13.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Extremum von } \bar{F}: \quad \delta \bar{F} &= 0, \text{ beliebiges } \delta y_i \iff \frac{\partial \bar{F}}{\partial y_i} = 0 \quad (13.6) \\ &\text{(auch Sattelpkt)} \\ &\text{ („horizontale“ Tangente)} \end{aligned}$$

• Kontinuierliche Version:

Variation von F :

$$\delta F = F[y(x) + \delta y(x)] - F[y(x)]$$

$$\stackrel{!}{=} \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\frac{\delta F}{\delta y(x)}}_{\text{"Funktionalableitung"}} \delta y(x) dx \quad (13.7)$$

Vgl. mit (13.5): (i) $\sum_i \rightarrow \int \dots dx$

(ii) $\frac{\partial F}{\partial y_i} \rightarrow \frac{\delta F}{\delta y(x)}$!

Extremum von F :

$$\delta F = 0, \text{ beliebiges } \delta y(x)$$

$$\rightarrow \frac{\delta F}{\delta y(x)} = 0 \quad (13.8)$$

→ Ges: $\frac{\delta F}{\delta y(x)}$!

• Durchführung der Variation für (13.4): $F = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx$

$$\delta F = \delta \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x) dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \delta f(y(x), y'(x), x) dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \delta y(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right] dx \quad (13.9) \quad [\delta x = 0!]$$

wichtige Schritte:

$$(i) \delta y' = \delta \frac{y(x+\varepsilon) - y(x)}{\varepsilon} \quad \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\dots) \right]$$

$$= \frac{\delta y(x+\varepsilon) - \delta y(x)}{\varepsilon}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \delta y' = \frac{d}{dx} \delta y(x) \quad (13.10)$$

(ii) (13.10) in (13.9) (2. Term)

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} dx \quad (13.11)$$

part. Integ
Euler

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y(x) \right] - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y(x) \right\} dx \quad !!!$$
$$\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y(x) \Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

weil $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$

$$\rightarrow \delta F \stackrel{(11)}{=} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \delta y(x) dx \quad (13.12)$$
$$\frac{\delta F}{\delta y(x)}$$

vgl. mit
(13.7)

$$\frac{\delta F}{\delta y(x)} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \quad (13.13)$$

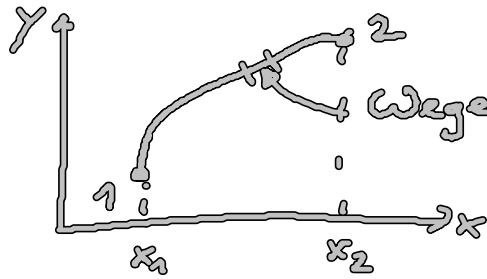
$$\delta F = 0 \iff \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (13.14)$$

... Euler-Lagrange-Gl.
des Variationsproblems

• Bsp:

1. Geodäten = Kurve mit kleinstem Abstand
zwischen 2 Pkten.

a) Ebene:



$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (13.15)$$

- Minimiere: $L = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx$

$$\delta L = 0 \xrightarrow{(13.14)} \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$\frac{\partial L}{\partial y} = 0$

$$\rightarrow \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = 0 \rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = \text{konst.}$$

$$\rightarrow y' = c_1 \rightarrow \boxed{y = c_1 x + c_2}$$

... Gerade ✓

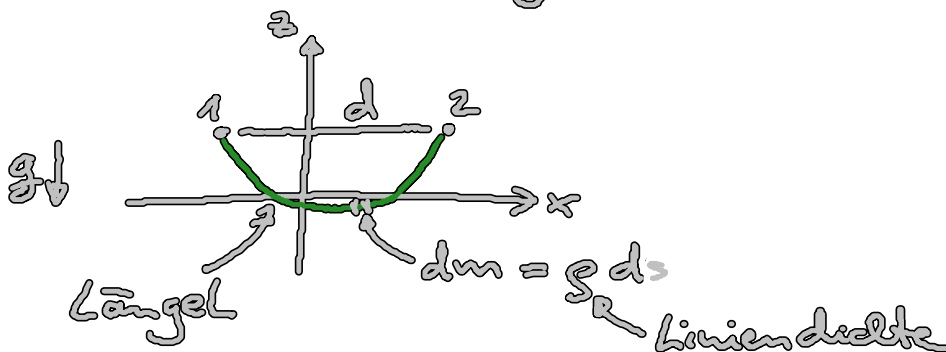
b) Kugel: → Großkreise („Übungen“)

Ans.: Routen von Flugzeugen

c) ART: Geodäten = Bahnkurven um Massepkte.
in gekrümmter 4D Raumzeit!

2. Kettenlinie = Katenoid:

= Form einer massenbelagten Kette im
homogenen Grav. feld



- Minimiere potentielle Energie:

$$U = g \int_1^2 dm z(x)$$

mit $dm = \rho ds = \rho dx \sqrt{1+(z')^2}$

$$\rightarrow U = g \rho \int_{x_1}^{x_2} z(x) \sqrt{1+(z')^2} dx$$

$$\delta U = 0 \xrightarrow{(13.14)} \frac{d}{dx} \frac{\partial U}{\partial z'} - \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

z.B. $\rightarrow z z'' - (z')^2 = 1$

(Hinweis: $(\cosh x)' = \sinh x$

$(\sinh x)' = \cosh x$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1!$)

$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$$z(x) = a \cosh \frac{x-x_0}{a} \quad (13.16)$$

.. Kettenlinie

- Nebenbedingung: $L = \int_1^2 ds$ mit $ds = \sqrt{1+(z')^2} dx$
 $= \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x-x_0}{a}} dx$
 $= \cosh \frac{x-x_0}{a} dx$

$$\rightarrow L = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \cosh \frac{x-x_0}{a} d(x-x_0)$$

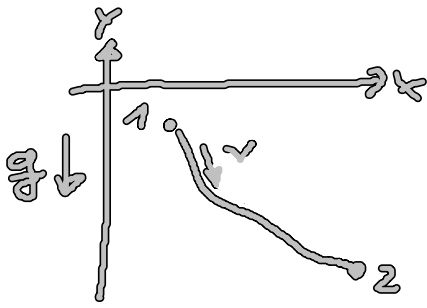
$$= a \sinh \frac{x-x_0}{a} \Big|_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}$$

$$\frac{L}{2a} = \sinh \frac{d}{2a} \quad (13.17)$$

Geg: $L, d \rightarrow a!$

3. Brachistochronen-Problem: Kurve, auf der ein Teilchen in kürzester Zeit im homog. Grav. feld

zwischen 2 Pkten. fällt



Minimiere:

$$T = \int_1^2 \frac{ds}{v} \quad (13.10)$$

[Übungen]

13.3 Euler-Lagrange'sche Gl. 2. Art