13.2 Eulersche Variationsrechnung

Funktional $F[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \underbrace{y'}_{\frac{dy}{dx}}, x)\, dx$

$$\boxed{\delta F = 0 \longleftrightarrow \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0} \qquad (13.14)$$

... Euler-Lagrange-Differentialgl.

13.3. Lagrangesche Gln. 2. Art

- Herleitung aus Hamiltonschem Prinzip

a) konservative Kräfte / generalisiertes Potential:

- Lagrangesche Fkt.: $L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) = T - U$
- Wirkung: $S = \int_{t_1}^{t_2} L(\dots)\, dt$
- Variation: $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t)\, dt = 0$

wie in Kap. 13.2 für jedes $y(x) \to q_j(t)$

$$\xrightarrow{(13.12)} \quad \delta S = \int_{t}^{t_2} \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right] \delta q_j(t)\, dt = 0$$

δq_j unabhängig voneinander variierbar $\longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ (13.3)

qed

b) nicht konservative Kräfte / allgemeiner Fall:

- L existiert nicht, stattdessen:

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}(\delta T + \delta A)\,dt = 0 \quad \text{mit } \delta A = \sum_i \underline{F}_i^{(t)} \cdot \delta \underline{r}_i = \sum_j Q_j\, \delta q_j}$$ (13.19) [vgl. (12.24)]

... virtuelle Arbeit

$\delta \underline{r}_i = \sum_j \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}\,\delta q_j$

$Q_j = \sum_i \underline{F}_i^{(t)} \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}$

- Ausführung der Variation:

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta T + \delta A)\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\sum_j \underbrace{\left[\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_j} + Q_j\right]}_{=0}\delta q_j\,dt$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j\ ,\ j = 1,\dots,f}$$ (12.25) !

- Vorsicht: Goldstein / Nolting

$\cancel{L = T - W \text{ mit } W = -\sum_i \underline{F}_i \cdot \underline{r}_i}$

„Arbeit ist ~~keine~~ Zustandsgröße, hängt vom Weg ab"

(s. Sommerfeld)

c) Potentialkräfte mit anholonomen Zwangsbed.:

- also: $L = T - U$ mit $\sum_j \phi_j^{(\nu)}\,\delta q_j = 0$ (13.20)

$\nu = 1,\dots,z$

• Variation:

$$\delta S = \int \sum_j \underbrace{\frac{\delta S}{\delta q_j}}_{\text{wie in a)}} \underbrace{\delta q_j}_{\text{nicht unabh.}} \, dt = 0$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{z} \lambda_\nu \sum_j \phi_j^{(\nu)} \delta q_j$$

$$= \int \sum_j \left(\frac{\delta S}{\delta q_j} + \sum_{\nu=1}^{z} \lambda_\nu \phi_j^{(\nu)} \right) \delta q_j \, dt = 0$$

Argumentation wie in Kap. 12.4

$$\longrightarrow \boxed{\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}}_{-\frac{\delta S}{\delta q_j}} = \underbrace{\sum_{\nu=1}^{z} \lambda_\nu \phi_j^{(\nu)}}_{\text{Zwangskräfte}} \, , \; j = 1, 2, \dots f} \quad (13.21)$$

[vgl. (12.21)]

... Lagrangesche Gln. gemischter Art

$$\boxed{\sum_{j=1}^{f} \phi_j^{(\nu)} \dot q_j = 0 \, , \; \nu = 1, \dots, z} \quad (13.22)$$

also: $f+z$ Dgl. für $f+z$ Variable q_j, λ_ν

13.4. generalisierte Impulse

• Def:

$$\boxed{p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}} \quad (13.23)$$

... generalisierter / kanonischer / zu q_j konjugierter } Impuls

• **Bsp:** (i) Teilchen im 3D Potential: $q_j = x_j$, $j = 1,2,3$ ... kart. Kord.

$$\left.\begin{array}{l} T = \frac{m}{2}\sum_j \dot{x}_j^2 \\ U = U(x_1, x_2, x_3) \end{array}\right\} L = T - U \longrightarrow \boxed{p_j = m\dot{x}_j} \quad (13.24)$$

(ii) Teilchen im em-Feld: $L = T - W = T - q\varphi + q\sum_i A_i \dot{x}_i$ (12.36)

Ladung, skalares, Vektorpotential

$$\xrightarrow{(13.23)} \boxed{p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \underbrace{m\dot{x}_i}_{\text{mechan. Impuls}} + \underbrace{q A_i}_{\text{Impuls des mitgeführten em Feldes}}} \quad (13.25)$$

NB: viele Teilchen mit holonomen Zwangsbed.:

$$x_i = x_i(q_1 \cdots q_f, t)$$

$i = 1 \ldots 3N$

x_1, x_2, x_3 A_1, A_2, A_3 1. Teilchen

x_4, x_5, x_6 A_4, A_5, A_6 2. Teilchen

$\vdots$

mit $\dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}$

$$\xrightarrow{\text{in (12.36)}} \boxed{\begin{array}{l} W = q\varphi - q\sum_j a_j \dot{q}_j + q\underbrace{\sum_i A_i \frac{\partial x_i}{\partial t}}_{=0 \text{ für skleronome Zwangsbed}} \\ \text{mit } a_j(\{q_j\}, t) = \sum_i A_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \end{array}} \quad (13.26)$$

... generalisiertes Vektorpotential

(iii) ebene Bewegung im Potential: $x, y \longrightarrow \varrho, \varphi$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \underset{\substack{x = \varrho\cos\varphi \\ y = \varrho\sin\varphi}}{=\!=} \frac{m}{2}(\dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\varphi}^2)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{radialer Impuls:} \quad p_\varrho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varrho}} = m\dot{\varrho} \\ &\text{Drehimpuls:} \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\varrho^2\dot{\varphi} = m\varrho v_\varphi \end{aligned}} \qquad (13.27)$$

13.5 Symmetrien & Erhaltungssätze

- Lagrange-Gln.: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad , \quad j = 1, \dots, f$

  mit $L = T - U$ ... kons. System

  $\hat{=}$ f Dgln 2. Ordnung in t

  $\longrightarrow$ Lsg. mit $2f$ Integ. konst.

  nicht immer explizit angebbar!

  (" " integrierbar)

- trotzdem: hilfreiche Aussagen über System möglich

  $\longrightarrow$ **Noether Theorem:**
  Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eines physikal. Systems gehört eine Erhaltungsgröße und umgekehrt.

kont. Symmetrie = kont. Transformation, die Verhalten des physikal. Systems nicht verändert.

Erhaltungsgröße = 1. Integral der Bewegung :
Konstante " ,

$$E = E(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) = \text{konst.} \quad \forall t$$

- Untersuche anhand von $L = T - U$:

a) Impulserhaltung

- Def: zyklische Koord: $\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$ (13.28)

... Symmetrie von L bzgl. Verschiebung q_j

- (13.28) in $\underbrace{(13.3)}_{\text{Lagrange Gln.}}$ $\longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \overset{(13.23)}{=} \frac{d}{dt} p_j = 0$!

$\longrightarrow \boxed{p_j = \text{konst}}$

... Impulserhaltung $\hat{=}$ Konstante der Bewegung

- Bsp (i) freies Teilchen: $\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \longrightarrow p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \text{konst.}$!

$\boxed{\text{Impulserhaltung} \longleftrightarrow \text{Translationsinvarianz des Raumes, Homogenität}}$

(ii) Teilchen im Zentralpotential: $U = U(r)$:

$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \longrightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{konst.}$! (vgl. (13.27))

$\boxed{\text{Drehimpulserhaltung} \longleftrightarrow \text{Drehinvarianz, Isotropie des Raumes}}$