

# 13.5. Symmetrien & Erhaltungssätze

## • Noether-Theorem

### a) Impulserhaltung:

- generalisierter Impuls:  $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$  (13.23)
- zyklische Koord. :  $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$  (13.28)  $\left. \begin{array}{l} \rightarrow \frac{d}{dt} p_j = 0 \\ \rightarrow p_j = \text{konst.} \end{array} \right\}$

(i) Impulserhaltung für freies Teilchen

(ii) Drehimpulserhaltung im Zentralfeldpotential

(iii) Vielteilchensysteme

- Schwerpunkts.koord.  $R_j = q_j \hat{=}$  Verschiebung des ges. Systems  
falls  $\frac{\partial L}{\partial R_j} = 0 \rightarrow p_j = \frac{\partial L}{\partial R_j} = \text{konst.}$

... Erhaltung des Gesamtimpulses  
[Bew.: Goldstein/Volking]

:

- Drehung des Gesamtsystems um  $\varphi = q_j$  um Achse  $\hat{y}$ :

$$\text{falls } \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{konst}$$

... Erhaltung des Gesamtdrehimpulses [Bew. Goldstein]

b) Energieerhaltung:  $\leftrightarrow$  Invarianz unter Zeittranslation

also:  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$   $\rightarrow$   $\frac{d}{dt} L = \sum_j \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right)$   
 Invarianz  $\uparrow$   
 $\stackrel{(13.30)}{=} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$

$$0 = \frac{d}{dt} \left[ L - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right]$$

$$\rightarrow H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L = \text{const.} \quad (13.30)$$

... Hamilton Fkt.!

Bedeutung von H: (13.30)  
 mit  $L = T - U \xrightarrow{p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}}$   $H = \sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - T + U \quad (13.31)$

- kinet. Energie:  $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$  mit  $\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$   
 $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\{q_j\}, t)$

$$\rightarrow T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^f a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^f b_j \dot{q}_j + c$$

mit  $a_{jk} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \stackrel{!}{=} a_{kj} \quad (13.32)$

$$b_j = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$$

$$c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)^2$$

• skalarwertige Zwangsbed.

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = 0! \xrightarrow{c=0=b_j} T = \frac{1}{2} \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (13.33)$$

... homogene Fkt. 2. Ordnung in  $\dot{q}_j$

$$\xrightarrow{\text{in (13.33)}} \sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T \quad (13.34)$$

$$(a_{jk} = a_{kj}) = \sum_k a_{jk} q_k!$$

mit (12.34) in (12.31):  $H = 2T - T + U$

$$\rightarrow \boxed{H = T + U} \quad (12.35)$$

... Gesamtenergie

- Bem: (i) gilt für kons. Systeme mit skleronomen, holonomen Zwangsbed.

(ii) o.B.: gilt auch für generalisierte Potentiale

$$W = q\varphi - q \sum_i A_i \dot{x}_i \quad (12.35)$$

$$\text{aber: } H = T + q\varphi$$

c) Eichinvarianz von L:

$$\text{Invarianz von } \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (*)$$

$$\text{unter Eichtransf. } L \rightarrow L + \frac{d}{dt} f(\{q_j\}, t)$$

(12.35)

wobei  $f(\dots)$  beliebige Fkt. ist

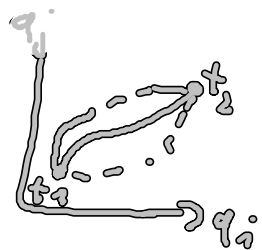
Beweis: „Übungen“

(i) Setze  $L + \frac{d}{dt} f$  in (\*) ein  $\rightarrow f$  fällt raus

$$(ii) \int_{t_1}^{t_2} [L + \frac{d}{dt} f] dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + f(t_2) - f(t_1)$$

$$\delta S = 0 \rightarrow 0 = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt + \underbrace{\delta f(t_2)}_{=0} - \underbrace{\delta f(t_1)}_{=0}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt \quad \text{qed}$$



14. Hamiltonsche Mechanik

## • Motivation:

- Lagrange Mechanik:  $\{q_1, \dots, q_s\}$  ... generalisierte Koordinaten

Lagrange Fkt:  $L = L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) \rightarrow$

Lagrange Bewgl:  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

$$\rightarrow q_i = q_i(t)$$

aber: dynam. Zustand zur Zeit  $t$  ist unendlich festgelegt, bei Kenntnis von

$$\{q_i(t)\}, \{\dot{q}_i(t)\}$$

Satz von 2f unabhängige Variable

- Hamiltonsche Mechanik

wähle  $\{q_i(t)\}, \{p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\}$  als Satz von

2f unabh. Variablen

$\rightarrow$  Hamilton - Fkt. ?

Hamiltonschen Bew. Gl. ?

## • Phasenraum $T$ :

(i) wird aufgespannt durch  $\{q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s\} \hat{=} 2f$  Dimensionen

(ii) Punkt in  $T \hat{=} \text{eindeutiger Zustand eines Systems}$

(iii) Bahn in  $T \hat{=} \text{Zeitentwicklung}$

Bsp: harm. Oszillator:



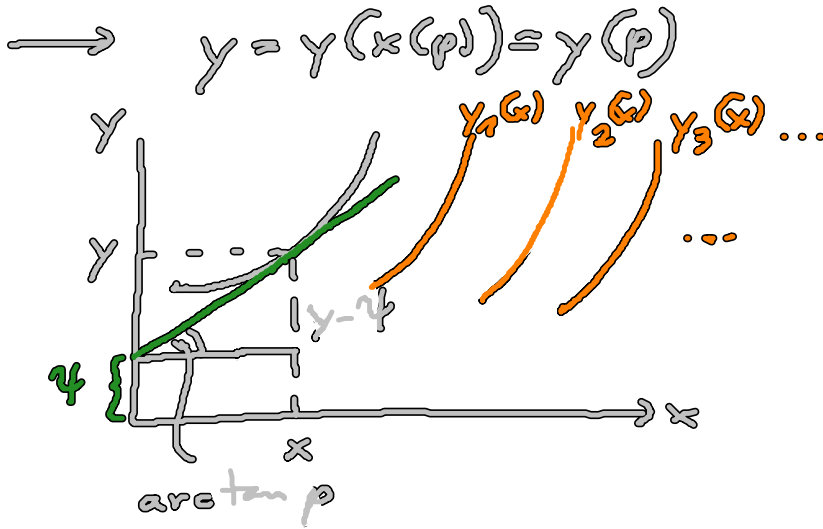
- wichtig!  $\rightarrow$  tiefere Einsichten in die Struktur der Mechanik
- $\rightarrow$  statistische Mechanik
- $\rightarrow$  Zugang zur „Quantisierung von mechan. Systemen“

## 14.1 Legendre Transformation

• Ziel:  $\{q_1 \dots q_s, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_s\} \rightarrow \{q_1 \dots q_s, p_1 \dots p_s\}$   
 Theorie mit gleicher Info!?

1-dim. allg. Fall.

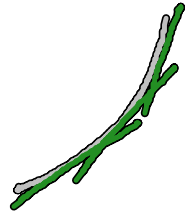
• Geg: allg. Fkt.  $y = y(x)$  mit  $p(x) = \frac{\partial y}{\partial x}$  Umkehr  $x = x(p)$   
 später:  $L$   $q_i$   $p_i$



• Frage:  $y(p) \rightarrow y(x)$ ?  
 $\xleftrightarrow{\text{Umkehr}} x = x(y)$ !

Antwort: nein, denn  $y(p) \hat{=} \text{Kurvenschar } y_i(x)$  als Lsg  
 von  $\frac{dy}{dx} = p(x)$

• Antwort:  $y(x)$  ist Einhüllende seiner Tangenten



Tangentenschar ist eindeutig bestimmt durch  $p, \psi(p) \dots$

Ordnungsabschnitt

Legendre-Transformation

mit  $p = \frac{y-x}{x} \rightarrow \psi(p) = y(p) - px(p)$  (14.1)

... Legendre-Transformierte von  $y(x)$

mit Differential:  $d\psi = dy - p dx - x dp$

$$\rightarrow \boxed{x = -\frac{\partial \psi}{\partial p}}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial p}$$

"aus  $\psi$  wieder  $x$  gewinnen!"

• Umkehrung:

$$\psi(p) \rightarrow x = -\frac{\partial \psi}{\partial p} \xrightarrow{\text{Umkehr}} p = p(x) \text{ in (14.1)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma(x) &= \gamma(p(x)) \\ &= \psi(p(x)) + p(x)x \end{aligned}} \quad (14.3) \quad !!$$

• Anwerdung auf  $\gamma = \gamma(x_1, \dots, x_n)$  entspricht!

• wichtig in Thermodynamik!