14.3 Methode der Poisson-Klammer

- Observable: $A = A(\{q_j\}, \{p_j\}, t)$
- $$\boxed{\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}} \quad (14.13)$$

$$\boxed{\{A, B\} = \sum_j \left(\frac{\partial A}{\partial q_j} \frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial B}{\partial q_j} \right)} \quad (14.15)$$

b) formale Eigenschaften

(i) Antisymmetrie: $\boxed{\{A, B\} = -\{B, A\}}$ (14.16)

$\longrightarrow \boxed{\{A, A\} = 0}$ (14.17)

(ii) Linearität: $\boxed{\{c_1 A_1 + c_2 A_2, B\} = c_1 \{A_1, B\} + c_2 \{A_2, B\}}$ (14.18)

(iii) Nullelement: $\boxed{\{c, A\} = 0}$ (14.19) c … Konstante

(iv) Produktregel: $\boxed{\{A, BC\} = \{A, B\} C + B \{A, C\}}$ (14.20)

NB: Stellung von B, C wichtig in QM

(v) Jacobi-Identität:

$$\boxed{\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0} \quad (14.21)$$

zyklisch vertauscht zyklisch vertauscht

Beweise: (i) -(iv) durch Einsetzen

(v) … nicht einfach

c) Beispiele/Rechnen!

(i) $$\{q_k, p_l\} = \sum_j \left(\underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial q_j}}_{\delta_{kj}} \underbrace{\frac{\partial p_l}{\partial p_j}}_{\delta_{lj}} - \underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial p_j}}_{=0} \underbrace{\frac{\partial p_l}{\partial q_j}}_{=0} \right)$$

$$\longrightarrow \boxed{\{q_k, p_l\} = \delta_{kl}} \quad (14.22)$$

(ii) $$\boxed{\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}} \quad (14.23)$$

d) <u>$\{\ldots\}$ ist unabhängig von kanonische Variablen!</u>

- kanonische Transformation: $Q_k = Q_k(\{q_j\}, \{p_j\}, t)$

  $P_k = P_k(\{q_j\}, \{p_j\}, t)$

- Observable: $A(\{q_j\}, \{p_j\}, t) = \bar{A}(\{Q_j\}, \{P_j\}, t)$

  $B(\ldots) = \bar{B}(\ldots)$

$\xrightarrow{\text{o.B.}}$ [s. Nolting Goldstein] $$\boxed{\{A, B\}_{q,p} = \{\bar{A}, \bar{B}\}_{Q,P} = \{A, B\}} \quad (14.24)$$

$\Longrightarrow$ $\{..\}$ erlauben Aussagen unabh. von Wahl der kanonische Variablen

e) <u>Integrale / Konstante der Bewegung:</u>

(i) $$\boxed{\{A, H\} = -\frac{\partial A}{\partial t} \xrightarrow{(14.13)} \frac{dA}{dt} = 0 \longrightarrow A = \text{konst}} \quad (14.25)$$

Bsp: Kap. 14.4

(ii) speziell:

$$\boxed{\{A, H\} = 0 \;\&\; \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \longrightarrow A = \text{konst}} \quad (14.26)$$

Bsp: Gesamtenergie $E = H$!

(iii) erzeuge neue Konstanten der Bewegung:

$$\underbrace{\left.\begin{array}{l}\{H, A\} = \frac{\partial A}{\partial t} \\ \{H, B\} = \frac{\partial B}{\partial t}\end{array}\right\}}_{\substack{A = \text{konst.!} \\ B = \text{konst.!}}} \xrightarrow[\substack{\text{Identität} \\ \text{für } A, B, H}]{\text{Jacobi}} \boxed{\{H, \{A, B\}\} = \frac{\partial}{\partial t}\{A, B\}} \quad (14.27)$$

$\longrightarrow \{A, B\} = \text{konst}$

... Poissonscher Satz!

5) Quantenmechanik:

$$\{A, B\} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{B}] = \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}]$$

(i) $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h ... Plancksche Konstante

(ii) $[\ldots, \ldots]$ .. Kommutator mit Eigenschaften 14.3 b) (i) - (v)

(iii) $\hat{A}, \hat{B}$ ... Operatoren = Observablen (z. B. Matrizen, Differentialoperatoren, ...)

(iv) Fundamental klammern [vgl. 14.3c) (i), (ii)]

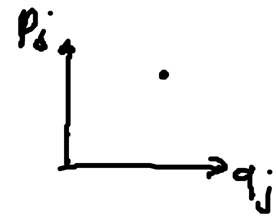
$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\,\delta_{ij}$$
$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = 0 = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] \quad (14.28)$$

14.4. Liouvillesche Satz

- Ausblick in die statistische Mechanik

• Zustand eines Systems ist eindeutig bestimmt durch:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{X}(t) &= \{q_j(t), p_j(t)\} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ p_{3N} \end{pmatrix} \\ &= \text{Punkt im Phasenraum} \end{aligned}} \quad (14.30)$$



Problem: $N \overset{\text{z.B.}}{=} 1\,\text{Mol} = 6 \cdot 10^{23} \longrightarrow$ nur unvollständige Info über System möglich

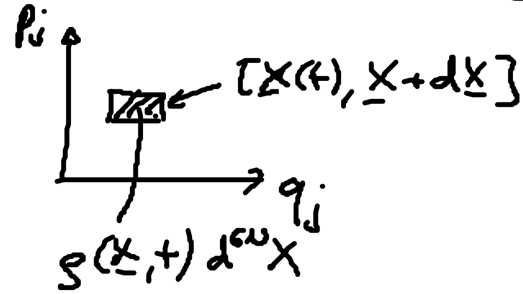
$\longrightarrow$ statistische Mechanik:
trifft Aussagen über Wahrscheinlichkeiten
& mittlere Größen

(14.31)

• Def.: Dichte $\rho(\underline{X},t)$ im Phasenraum

$$\rho(\underline{X},t)\,\underbrace{d^{6N}X}_{\substack{6N\text{ dim.}\\ \text{Vol.-element}}} \quad \dots \text{ Wahrscheinlichkeit System im Zustand aus } [\underline{X}(t), \underline{X}(t)+d\underline{X}] \text{ anzutreffen}$$

$$\int_V \rho(\underline{X},t)\, d^{6N}X = 1 \quad \dots \text{ „System ist irgendwo in V“} = \text{Normierung} \quad (14.31)$$



• Observable: $A = A(\{q_j\},\{p_j\},t) = A(\underline{X},t)$

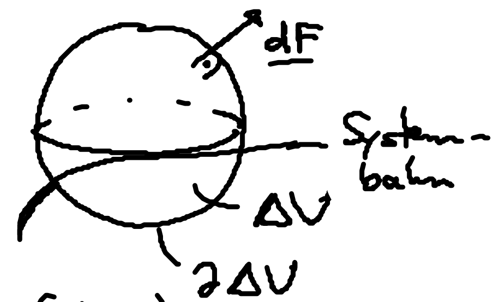
$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Mittelwerte = Erwartungswert:} \\ &\langle A \rangle = \int \underbrace{d^{6N}X\, \rho(\underline{X},t)}_{\substack{\text{Wahrscheinlichkeit}\\ \text{mit der } A(\underline{X},t)\\ \text{realisiert wird}}} A(\underline{X},t) \end{aligned}} \quad (14.32)$$

- Kontinuitätsgleichung: Herleitung

Ausgangspunkt: $\int\limits_{\Delta V} \varrho(\underline{X},t)\, d^{6N}X$ ... Wahrscheinl. System in ΔV anzutreffen

zeitl. Änderung:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Delta V} \varrho(\underline{X},t)\, d^{6N}X \underset{\Delta V \text{ fest}}{=} \int\limits_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial t}\varrho(\underline{X},t)\, d^{6N}X$$

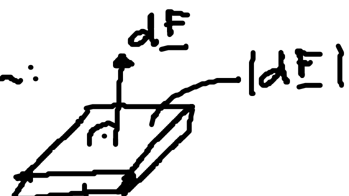


$$= - \underbrace{\int\limits_{\partial \Delta V} \underline{j}(\underline{X},t) \cdot d\underline{F}}_{\substack{\text{Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit} \\ \text{daß System } \Delta V \text{ über } \partial\Delta V \text{ verläßt}}} \qquad (14.33)$$

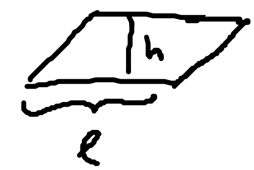
System wird nicht „erzeugt" oder „vernichtet"

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Wahrscheinlichkeitsstromdichte:} \\ \underline{j}(\underline{X},t) = \varrho(\underline{X},t)\,\dot{\underline{X}}(t)\end{array}} \qquad (14.34)$$

Warum:



$$\dot{\underline{X}} = \frac{d\underline{X}}{dt}\,, \quad \underline{j} = \varrho \frac{d\underline{X}}{dt}$$



Volumen: Fläche × Höhe = $d\underline{X} \cdot d\underline{F}$

$\longrightarrow \quad \varrho\, d\underline{X} \cdot d\underline{F}$ ... Wahrscheinlichkeit, daß das System in Zeit dt die Fläche $|d\underline{F}|$ durchquert! $\longrightarrow$ (14.34)
$\longrightarrow$ (14.33)

Satz von Gauß:
(in 6N Dimensionen)

$$\boxed{\begin{array}{c}\displaystyle\int\limits_{\partial\Delta V} \underline{j} \cdot d\underline{F} = \int\limits_{\Delta V} \operatorname{div} \underline{j}\; d^{6N}X \\[2ex] \text{mit } \operatorname{div} = \underline{\nabla}_{\underline{X}} \cdot = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial X_{6N}} \end{pmatrix} \cdot \end{array}} \qquad (14.35)$$

$$(14.33) \xrightarrow[(14.35)]{(14.34)} \int_{\Delta V} \Big[\frac{\partial}{\partial t} \varrho + \operatorname{div} \underbrace{(\varrho \dot{X})}_{\underline{j}} \Big] d^{6N} X = 0$$

$$\xrightarrow[\text{beliebig}]{\Delta V} \quad \boxed{\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \underline{\dot{X}}) = 0} \quad (14.36)$$

... Kontinuitätsgleichung für ϱ