14.3 Methode der Poisson-Klammer

- Observable: $A = A(\{q_j\},\{p_j\},t)$
- $$\boxed{\frac{dA}{dt} = \{A,H\} + \frac{\partial A}{\partial t}} \quad (14.13)$$

$$\boxed{\{A,B\} = \sum_j \left(\frac{\partial A}{\partial q_j}\frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j}\frac{\partial B}{\partial q_j} \right)} \quad (14.15)$$

b) formale Eigenschaften

(i) Antisymmetrie: $\boxed{\{A,B\} = -\{B,A\}}$ (14.16)

$\longrightarrow \boxed{\{A,A\} = 0}$ (14.17)

(ii) Linearität: $\boxed{\{c_1 A_1 + c_2 A_2, B\} = c_1\{A_1,B\} + c_2\{A_2,B\}}$ (14.18)

(iii) Nullelement: $\boxed{\{c,A\} = 0}$ (14.19) $\quad c \ldots$ Konstante

(iv) Produktregel: $\boxed{\{A,BC\} = \{A,B\}C + B\{A,C\}}$ (14.20)

NB: Stellung von B, C wichtig in QM

(v) Jacobi-Identität:

$$\boxed{\{A,\{B,C\}\} + \{B,\{C,A\}\} + \{C,\{A,B\}\} = 0} \quad (14.21)$$

zyklisch vertauscht $\qquad$ zyklisch vertauscht

Beweise: (i)-(iv) durch Einsetzen

(v) ... nicht einfach

c) Beispiele/Rechnen!

(i) $$\{q_k, p_\ell\} = \sum_j \left(\underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial q_j}}_{\delta_{kj}} \underbrace{\frac{\partial p_\ell}{\partial p_j}}_{\delta_{\ell j}} - \underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial p_j}}_{=0} \underbrace{\frac{\partial p_\ell}{\partial q_j}}_{=0} \right)$$

$$\longrightarrow \boxed{\{q_k, p_l\} = \delta_{kl}} \quad (14.22)$$

(ii) $$\boxed{\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}} \quad (14.23)$$

d) $\{\dots\}$ ist unabhängig von kanonische Variablen!

- kanonische Transformation: $Q_k = Q_k(\{q_i\}, \{p_i\}, t)$
  $P_k = P_k(\{q_i\}, \{p_i\}, t)$

- Observable: $A(\{q_j\}, \{p_j\}, t) = \bar{A}(\{Q_j\}, \{P_j\}, t)$
  $B(\dots) = \bar{B}(\dots)$

$$\xrightarrow[\text{[s. Nolting, Goldstein]}]{\text{o.B.}} \quad \boxed{\{A, B\}_{q,p} = \{\bar{A}, \bar{B}\}_{Q,P} = \{A, B\}} \quad (14.24)$$

$\Longrightarrow$ $\{\dots\}$ erlauben Aussagen unabh. von Wahl der kanonische Variablen

e) Integrale / Konstante der Bewegung:

(i) $$\boxed{\{A, H\} = -\frac{\partial A}{\partial t} \xrightarrow{(14.13)} \frac{dA}{dt} = 0 \longrightarrow A = \text{konst}} \quad (14.25)$$

Bsp: Kap. 14.4

(ii) speziell:

$$\boxed{\{A, H\} = 0 \;\&\; \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \longrightarrow A = \text{konst}} \quad (14.26)$$

Bsp: Gesamtenergie $E = H$!

(iii) erzeuge neue Konstante der Bewegung:

$$\left.\begin{aligned}\underbrace{\{H,A\} = \frac{\partial A}{\partial t} \\ \{H,B\} = \frac{\partial B}{\partial t}}_{\substack{A = \text{konst.!} \\ B = \text{konst.!}}}\end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{für } A, B, H]{\text{Jacobi-Identität}} \boxed{\{H,\{A,B\}\} = \frac{\partial}{\partial t}\{A,B\}} \quad (14.27)$$

$\longrightarrow \{A,B\} = \text{konst}$

... Poissonscher Satz!

5) <u>Quantenmechanik:</u>

$$\{A,B\} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar}[\hat{A},\hat{B}] = \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}]$$

(i) $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h ... Plancksche Konstante

(ii) $[\ldots,\ldots]$ .. Kommutator mit Eigenschaften 14.3 b) (i) – (v)

(iii) $\hat{A}, \hat{B}$ ... Operatoren = Observablen (z.B. Matrizen, Differentialoperatoren, ...)

(iv) Fundamentalklammern [vgl. 14.3c) (i),(ii)]

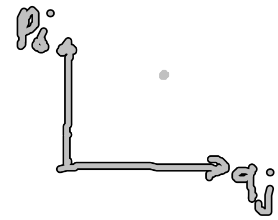
$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\,\delta_{ij}$$
$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = 0 = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] \quad (14.28)$$

14.4. Liouvillesche Satz

- Ausblick in die statistische Mechanik

• Zustand eines Systems ist eindeutig bestimmt durch:

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{X}(t) &= \{q_i(t), p_j(t)\} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ p_{3N} \end{pmatrix} \\ &= \text{Punkt im Phasenraum}\end{aligned}} \qquad (14.30)$$



Problem: $N \hat{=} 1\,\text{Mol} = 6 \cdot 10^{23} \longrightarrow$ nur unvollständige Info über System möglich

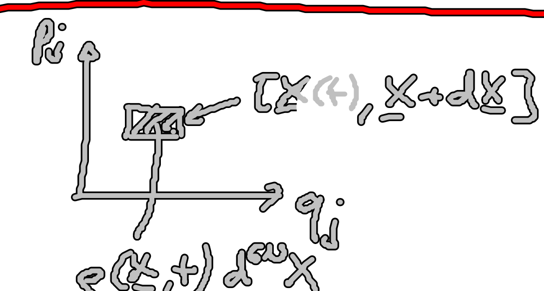
$\longrightarrow$ statistische Mechanik:
trifft Aussagen über Wahrscheinlichkeiten & mittlere Größen

(14.31)

• Def.: Dichte $\rho(\underline{X}, t)$ im Phasenraum

$\rho(\underline{X},t)\,\underbrace{d^{6N}X}_{\text{6N dim. Vol.element}}$ ... Wahrscheinlichkeit System im Zustand aus $[\underline{X}(t), \underline{X}(t)+d\underline{X}]$ anzutreffen

$$\int_V \rho(\underline{X},t)\, d^{6N}X = 1 \quad \ldots \text{ „System ist irgendwo in } V\text{"} = \text{Normierung} \qquad (14.31)$$



• Observable: $A = A(\{q_i\}, \{p_j\}, t) = A(\underline{X}, t)$

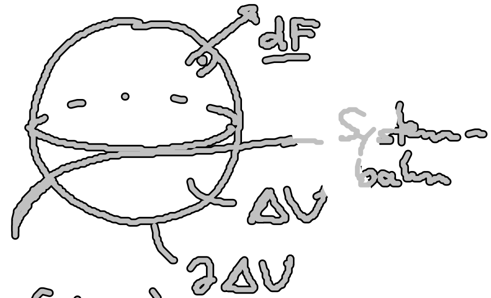
Mittelwerte = Erwartungswert:

$$\boxed{\langle A \rangle = \underbrace{\int d^{6N}X\, \rho(\underline{X},t)}_{\text{Wahrscheinlichkeit mit der } A(\underline{X},t) \text{ realisiert wird}} A(\underline{X},t)} \qquad (14.32)$$

• Kontinuitätsgleichung: Herleitung

Ausgangspunkt: $\int_{\Delta V} \rho(\underline{X},t)\, d^{6N}X$ ... Wahrscheinl. System in ΔV anzutreffen

zeitl. Änderung:



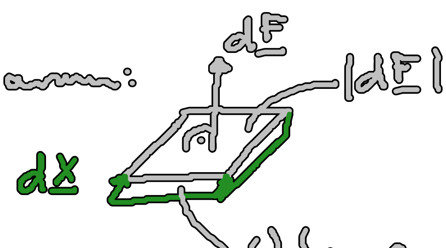
$$\frac{d}{dt}\int_{\Delta V}\rho(\underline{X},t)\,d^{6N}X \underset{\Delta V\ \text{fest}}{=} \int_{\Delta V}\frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{X},t)\,d^{6N}X$$

$$= -\underbrace{\int_{\partial\Delta V} \underline{j}(\underline{X},t)\cdot d\underline{F}}_{\substack{\text{Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit}\\ \text{daß System } \Delta V \text{ über } \partial\Delta V \text{ verläßt}}} \qquad (14.33)$$

System wird nicht erzeugt, oder „vernichtet"

$$\boxed{\text{Wahrscheinlichkeitsstromdichte:}\quad \underline{j}(\underline{X},t) = \rho(\underline{X},t)\,\dot{\underline{X}}(t)} \qquad (14.34)$$

Warum:



$$\dot{\underline{X}} = \frac{d\underline{X}}{dt}, \quad \underline{j} = \rho\frac{d\underline{X}}{dt}$$

Volumen: Fläche × Höhe = $d\underline{X}\cdot d\underline{F}$

$\longrightarrow$ $\rho\, d\underline{X}\cdot d\underline{F}$ ... Wahrscheinlichkeit, daß das System in Zeit dt die Fläche $|d\underline{F}|$ durchquert! $\longrightarrow$ (14.34)
$\longrightarrow$ (14.33)

Satz von Gauß: (in 6N Dimensionen)

$$\boxed{\int_{\partial\Delta V}\underline{j}\cdot d\underline{F} = \int_{\Delta V}\mathrm{div}\,\underline{j}\; d^{6N}X \qquad \text{mit } \mathrm{div} = \underline{\nabla}_{\underline{X}}\cdot = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_{6N}}\end{pmatrix}\cdot} \qquad (14.35)$$

$$(14.33) \xrightarrow[(14.35)]{(14.34)} \int_{\Delta V} \left[\frac{\partial}{\partial t}\rho + \operatorname{div}(\underbrace{\rho \dot{\underline{x}}}_{\underline{j}}) \right] d^{(3)}X = 0$$

$$\xrightarrow[\text{beliebig}]{\Delta V} \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \dot{\underline{X}}) = 0} \quad (14.36)$$

... Kontinuitätsgleichung für ρ