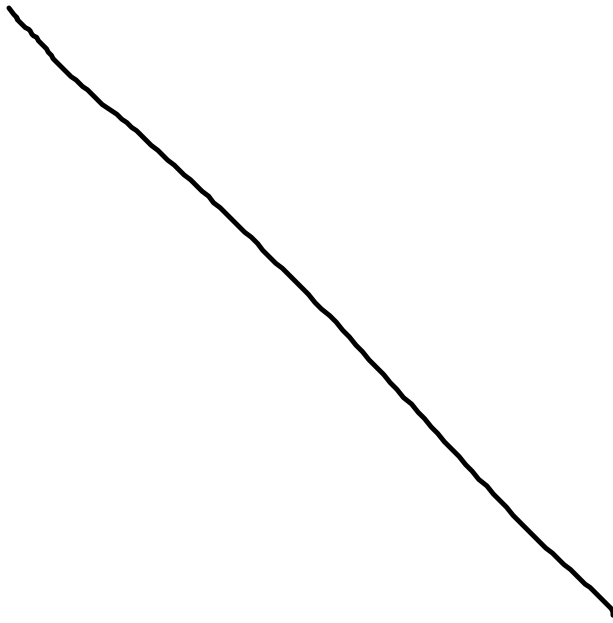


17.10.



17.10.

QM Wellenpaket

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int d\underline{k} \varphi(\underline{k})$$

$$e^{-i\omega(\underline{k})t} e^{i\underline{k}\underline{x}} \equiv \Psi(\underline{x}, t)$$

d Raumdimension

Schrödinger

$$\hbar \omega(\underline{k}) = \frac{\hbar^2 \underline{k}^2}{2m}$$

Freies Teilchen
der Masse m

$$\Rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hat{H} \Psi, \quad \hat{H} = -\frac{\Delta}{2m} \quad (\hbar=1)$$

$$p = \hbar k$$

$$E = \hbar \omega$$

Hamilton-Operator

$$\Delta = \nabla^2 \quad \text{Laplace-Operator}$$

Korrespondenzprinzip

$$\hat{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla$$

$$E^2 = m^2 c^4 + \underbrace{p^2 c^2}_{\text{relativistisch}}$$

$$(c=1)$$

relativistisch
Zwei Lösungen

$$\Rightarrow E = \pm \sqrt{m^2 + p^2}$$

$$\omega(\underline{k}) = \sqrt{\underline{k}^2 + m^2}$$

relativ. Dispersionsrelation

A: nicht-rel.
Grenzfall $v \ll c$

Damit erfüllt das Wellenpaket $\Psi(\underline{x}, t)$
die DGL

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + m^2 \right) \Psi(\underline{x}, t) = 0} \quad \text{Klein-Gordon-Gleichung}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d^d k \dots e^{-i\omega(k)t}$$

$$\rightarrow -[\omega(k)]^2 = -(k^2 + m^2)$$

$$\Delta \int d^d k \dots e^{i\underline{k}\underline{x}}$$

$$\rightarrow -\underline{k}^2$$

$$\uparrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \dots$$

Kontinuitätsgleichung $\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rho + \text{div } \vec{j} = 0$

\vec{j} : Stromdichte
 ρ : "Teilchendichte"

$$\vec{j} = \frac{1}{2im} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \quad \text{Stromdichte}$$

Sgl: $|\Psi(t)|^2 = \rho(t)$

Kgl: Kontinuitätsgl. nur erfüllbar mit

$$\rho = \frac{i}{2m} \left(\Psi^* \frac{\partial}{\partial t} \Psi - \Psi \frac{\partial}{\partial t} \Psi^* \right), \quad \text{also anders als in der}$$

(Nachprüfen als AUFGABE). Schrödingergleichung!

Problem: Damit ist ρ nicht mehr unbedingt positiv!

$$d^d x \equiv dx_1 dx_2 \dots dx_d$$

Allerdings $\int d^d x \rho(x, t) =$

$$\underbrace{\int d^d x}_{d\text{-fach}} \underbrace{\int d^d k}_{d\text{-fach}} \underbrace{\int d^d k'}_{d\text{-fach}} \varphi^*(\underline{k}) \varphi(\underline{k}') \omega(\underline{k}') e^{i(\underline{k}' - \underline{k}) \cdot \underline{x}}$$

$$\cdot \frac{1}{m} \frac{1}{(2\pi)^d}$$

Benutze $\int d^d x e^{i \underline{k} \cdot \underline{x}} = (2\pi)^d \delta(\underline{k})$

$$= \frac{1}{m} \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \underline{k} |\varphi(\underline{k})|^2 \underbrace{\omega(\underline{k})}_{+\sqrt{\underline{k}^2 + m^2}} \gg 0$$

"rel. Pythagoras"

Diskussion: $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + m^2 \right) \Psi = 0$

- Wellengleichung, hyperbol. Differentialgl.
 - Auch das Wellenpaket mit $-\sqrt{\underline{k}^2 + m^2} = \omega(\underline{k})$ erfüllt die KGgl! Negative Energie
 ⇒ Interpretationsprobleme
 - 2. Ordnung in der Zeit: Anfangswertproblem
 ($\Psi|_{t \geq 0}$ aus $\Psi|_{t=0}$ bestimmen) nicht lösbar.
 - Schreibweise $\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Psi = 0$
- $\square \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \equiv \partial_\mu \partial^\mu$ d'Alembert-Operator
- $\frac{\hbar}{m c}$ "Compton-Wellenlänge"

Kapitel I: Relativistische QM

1. Klein-Gordon-Gleichung

} nach oben

2. Klein-Jordan und Relativität

- Einsteins:
- gleiche Naturgesetze in gleichförmig gegeneinander bewegten Inertialsystemen
 - Lichtgeschw. ist in allen Inertialsystemen dieselbe

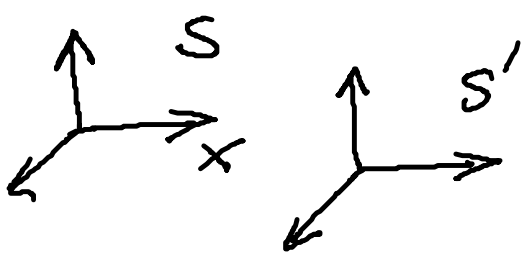
Beispiel: Lichtpuls im System S wird zur Zeit $t=0$ ausgesandt. legt Distanz $|\underline{r}| = ct$ zurück.

Führt von System S betrachtet, neue Koordinaten \underline{r}', t' , $c' = c$:

$$\underline{r}'^2 - c^2 t'^2 = 0 \quad \text{in } S' \quad (1.9)$$

$$\underline{r}'^2 - c^2 t'^2 = 0 \quad \text{in } S' \quad (1.10)$$

↑ selbes c'



\underline{v} Geschwindigkeit \in parallel zu x

Trafo der Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

Lorentz-Transformation

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} \quad \beta \equiv \frac{v}{c} \quad \text{und} \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

CHECK

Überprüfe (1.10):

$$\underline{x}'^2 - c^2 t'^2 = (x', ct') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \gamma^2(x, ct) \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1-\beta^2 & \\ & \beta^2-1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \\
 &= \gamma^2(x, ct) \begin{pmatrix} 1-\beta^2 & 0 \\ 0 & \beta^2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \underline{x^2 - c^2 t^2}
 \end{aligned}$$

Invariant der Wellengleichung

$$\text{in } S: \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right)}_{\square} \varphi(x, t) = 0 \quad \left| \quad \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t'^2} - \nabla'^2 + m^2 \right)}_{\square'} \varphi'(x', t') = 0 \text{ in } S' \right. \quad (1.13)$$

unter Lorentztrf: $\square \mapsto \square'$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} = \gamma \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\gamma \beta}{c} \frac{\partial}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} = \left\{ \gamma \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\gamma \beta}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \right\} \left\{ \gamma \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\gamma \beta}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \right\}$$

$\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ entsprechend.

\Rightarrow AUFGABE \rightarrow Forminvariant der Wellengl. unter LT

Lösungen der KGgl
Ebene Wellen (und deren Überlagerungen)

$$p = \hbar k$$

$$\Psi(x, t) = A e^{\mp \frac{i}{\hbar} \sqrt{2^4 2^2} t} e^{i p x} \quad (1.14)$$

- : positive Energien $+\sqrt{\quad}$

+ : neg. Energien $-\sqrt{\quad}$

$$E^2 = p^2 + m^2$$