17.10.

17.10.

QM Wellenpaket

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int d^d\underline{k}\,\varphi(\underline{k})\; e^{-i\omega(\underline{k})\cdot t}\, e^{i\underline{k}\,\underline{x}} \equiv \Psi(\underline{x},t)$$

d Raumdimension

Schrödinger $\quad \hbar\omega(\underline{k}) = \dfrac{\hbar^2\underline{k}^2}{2m}$ freies Teilchen der Masse m

$\Rightarrow \quad i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}\Psi, \qquad \hat{H} = -\frac{\Delta}{2m} \quad (\hbar = 1)$

Hamilton-Operator

$p = \hbar k$

$E = \hbar\omega$

$\Delta = \underline{\nabla}^2$ Laplace-Operator

Korrespondenzprinzip

$\hat{p} \to \frac{\hbar}{i}\underline{\nabla}$

$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \qquad (c=1)$

relativistisch

$\Rightarrow \quad E = \pm\sqrt{m^2 + p^2}$

zwei Lösungen

$\omega(\underline{k}) = \sqrt{\underline{k}^2 + m^2}$ relativ. Dispersionsrelati

A: nicht-rel. Grenzfall $v \ll c$

Damit erfüllt das Wellenpaket $\Psi(\underline{x},t)$ die DGL

$$-\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + m^2\right)\Psi(\underline{x},t) = 0 \quad \text{Klein-Gordon-Gleichung}}$$

$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int d^dk \ldots e^{-i\omega(\underline{k})t} \longrightarrow -[\omega(\underline{k})]^2 = -(\underline{k}^2 + m^2)$

$\Delta \int d^dk \; e^{i\underline{k}\underline{x}} \longrightarrow -\underline{k}^2$

$\updownarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \dots$

Kontinuitätsgleichung: $\underline{\partial/\partial t\, \rho + \mathrm{div}\, \underline{j} = 0}$

$\underline{j}$: Stromdichte

ρ : „Teilchendichte".

$\underline{j} = \frac{1}{2im}\left(\psi^* \underline{\nabla} \psi - \psi \underline{\nabla} \psi^*\right)$ $\hat{=}$ Stromdichte

Sgl: $|\psi(t)|^2 = \rho(t)$

Kgl: Kontinuitätsgl. nur erfüllbar mit

$$\rho = \frac{i}{2m}\left(\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^*\right),$$ also anders als in der Schrödingergleichung!

! (Nachprüfen als <u>AUFGABE</u>).

Problem: Damit ist ρ nicht mehr unbedingt <u>positiv!</u>

$d^d x \equiv dx_1 dx_2 \dots dx_d$

Allerdings $\int d^d x\, \rho(\underline{x}, t) =$

$$\underbrace{\int d^d x}_{d\text{-fach}} \underbrace{\int d^d k}_{d\text{-fach}} \underbrace{\int d^d k'}_{d\text{-fach}} \varphi^*(\underline{k})\varphi(\underline{k}')\,\omega(\underline{k}')\, e^{i(\underline{k}'-\underline{k})\underline{x}}$$

$$\cdot \frac{1}{m} \frac{1}{(2\pi)^d}.$$

Benutze $\int d^d x\, e^{i\underline{k}\underline{x}} = (2\pi)^d \delta(\underline{k})$

$$= \frac{1}{m} \cancel{\frac{1}{(2\pi)^d}} \int d^d \underline{k}\, |\varphi(\underline{k})|^2 \underbrace{\omega(\underline{k})}_{+\sqrt{\underline{k}^2+m^2}} > 0$$

rel. "Pythagoras"

<u>Diskussion</u>: $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + m^2\right)\Psi = 0$

- Wellengleichung, hyperbol. Differentialgl.
- Auch das Wellenpakets mit $-\sqrt{k^2+m^2} = \omega(k)$ erfüllt die KGgl! Negative Energie
  $\Rightarrow$ Interpretationsprobleme
- 2. Ordnung in der Zeit: Anfangswertproblem ($\Psi(t>0)$ aus $\Psi(t=0)$ bestimmen) nicht lösbar.
- Schreibweise $\left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\Psi = 0$

$$\Box = \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \Delta = \partial_\mu \partial^\mu \quad \text{d'Alembert-Operator}$$

$\frac{\hbar}{mc}$ "Compton-Wellenlänge"

<u>Kapitel I: Relativistische QM</u>

<u>1. Klein-Gordon-Gleichung</u>

nach oben

2. Klein-Gordon und Relativität

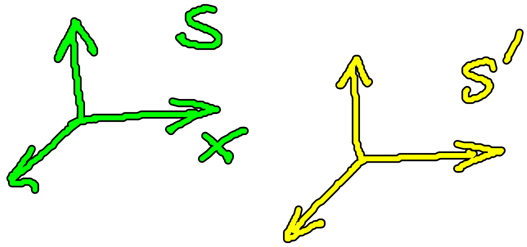
Einstein:
- gleiche Naturgesetze in gleichförmig gegeneinander bewegten Inertialsystemen
- Lichtgeschw. ist in allen Inertialsystemen dieselbe

Beispiel: Lichtpuls im System S wird zur Zeit $t=0$ ausgesandt. Legt Distanz $|\underline{r}| = ct$ zurück.

$$\underline{r}^2 - c^2 t^2 = 0 \quad \text{in } S \qquad (1.9)$$

Jetzt von System S' betrachtet, neue Koordinaten $\underline{r}'$, t', $c' = c$: $\underline{r}'^2 - c^2 t'^2 = 0$ in S' (1.10)

↑ selbes c!



$\underrightarrow{v}$ Geschwindigkeit parallel zu x

Trafo der Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

Lorentz-Transformation

$\beta = \frac{v}{c}$ und $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix}$$

CHECK

überprüfe (1.10):

$$\underline{x'^2 - c^2 t'^2} = (x', ct') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} =$$

$$= \gamma^2 (x, ct) \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ \beta & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

$$= \gamma^2 (x, ct) \begin{pmatrix} 1-\beta^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = \underline{x^2 - c^2 t^2}$$

Invarianz der Wellengleichung

$$\text{in } S: \Big(\underbrace{\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \nabla^2}_{\Box} + m^2 \Big) \varphi(\underline{x}, t) = 0 \quad \Big| \quad \Big(\underbrace{\frac{\partial^2}{c^2 \partial t'^2} - \nabla'^2}_{\Box'} + m^2 \Big) \varphi'(x', t') = 0 \text{ in } S' \qquad (1.13)$$

unter Lorentztrafo: $\Box \longmapsto \Box'$

$$\partial / \partial x = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} = \gamma \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\gamma \beta}{c} \frac{\partial}{\partial t'}$$

$$\partial^2 / \partial x^2 = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} = \left\{ \gamma \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\gamma\beta}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \right\} \left\{ \gamma \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\gamma\beta}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \right\}$$

$\partial^2 / \partial t^2$ entsprechend.

$\Rightarrow$ $\Box = \Box'$

AUFGABE $\rightarrow$ Forminvarianz der Wellengl. / KGl. unter LT

$p = \hbar k$

Lösungen der KGgl

Ebene Wellen (und deren Überlagerungen)

$$\psi(\underline{x},t) = A\, e^{\mp \frac{i}{\hbar}\sqrt{m^2c^4+p^2c^2}\,t}\, e^{i\underline{p}\underline{x}} \qquad (1.14)$$

$-$: positive Energien $+\sqrt{}$

$+$: neg. Energien $-\sqrt{}$

$E^2 = p^2 + m^2$