19.10.

19.10.

3. Klein-Gordon im (Vektor) Potential, Eichinvarianz

$$E^2 = p^2 + m^2 \qquad (1.15)$$

Potential ϕ (skalar)

$\underline{A}$ (Vektor)

Magnetfeld $\underline{B} = \mathrm{rot}\,\underline{A} \equiv \underline{\nabla} \times \underline{A}$ (1.16)

elektrisches Feld $\underline{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underline{A}$

- $\underline{E}$ und $\underline{B}$ ändern sich nicht unter Eichtransformationen

$$\underline{A} \longmapsto \underline{A} + \underline{\nabla}\chi, \quad \chi = \chi(\underline{x}, t)$$
$$\phi \longmapsto \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\chi \qquad (1.17)$$

- klassische Mechanik

$$H = \frac{\underline{p}^2}{2m} \longmapsto H = \frac{(\underline{p} - e\underline{A})^2}{2m} + e\phi$$

Masse m, Ladung e

mit Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\dot{\underline{r}} = \frac{\partial H}{\partial \underline{p}}, \quad \dot{\underline{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \underline{r}}$$

$$\Longrightarrow \quad m\ddot{\underline{r}} = e\left(\dot{\underline{r}} \times \underline{B} + \underline{E}\right)$$ Lorentzkraft (1.18)

„manifest eichinvariant“

• QM:

a) Schrödingergleichung durch Korrespondenzprinzip $p \mapsto \hat{p} = \frac{\hbar}{i}\nabla$

$$\Rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi = \left\{\frac{(\hat{p}-e\hat{A})^2}{2m} + e\phi\right\}\psi$$

$\hat{A}$: Vektorpotential (1.10)

Skripte: Fredenhagen (Hamburg)
Schlickeiser (Bochum)

Bücher: U. Scherz
Schwinger (kl. Elektrodynamik)
Greiner Bd. 6

b) Schrödingergleichung + Prinzip der lokalen Eichinvarianz (fundamental wichtig für QED, QCD
chromo).

Schritt 1: freie Sgl: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{p^2}{2m}\psi$

Schritt 2: Mit $\Psi(\underline{x},t)$ erfüllt auch

$\Psi(\underline{x},t)\, e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, die Sgl.

[$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$, $|e^{i\varphi}| = 1$]

und beschreibt dieselbe Physik:

Erwartungswerte von Messgrößen $\hat{O} = \hat{O}(\underline{x}, \underline{\nabla}, \partial/\partial t)$ sind invariant, d.h.

$$\int d^d x\, \Psi^*(\underline{x},t)\, \hat{O}\left(\underline{x}, \underline{\nabla}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \Psi(\underline{x},t) \equiv \langle O \rangle_\Psi \qquad (1.20)$$

ist invariant bei

$$\Psi \mapsto \Psi e^{i\varphi}$$

Schritt 3: Prinzip der lokalen Eichinvarianz:

ändere die Sgl. so, dass auch

lokale Eichtransformationen

$$\Psi \to \Psi e^{i\varphi(\underline{x},t)}$$

nichts an der Physik ändert.

Also: Mit Ψ ist auch $\Psi e^{i\varphi(\underline{x},t)}$ Lösung einer Schrödingergleichung und ergibt dieselben Erwartungswerte für alle Messgrößen.

Schritt 4, Lösung: Einführung neuer ~~Ableitungen~~

$$\underline{\nabla} \to \underline{\nabla} + \underline{f}(\underline{x},t)$$

↑ Vektorfeld

In (1.20) machen $\underline{\nabla}$ und $\partial/\partial t$ Probleme, da z.B.

$$\underline{\nabla}\,\psi e^{i\varphi} + e^{i\varphi}\,\underline{\nabla}\psi$$

lässt sich nicht „durchziehen"

Idee: ersetze Ableitung $\underline{\nabla}$ durch „kovariante Ableitung" $\underline{D}$, so dass

$$\underline{D}_\varphi \underbrace{\psi e^{i\varphi(x,t)}}_{\text{mit}} = e^{i\varphi(\underline{x},t)}\, \underbrace{\underline{D}\psi}_{\text{ohne}}$$

Phase

Ansatz: $\underline{D}_\varphi = \underline{\nabla} + \underline{f}_\varphi(\underline{x},t)$ (1.23)

Zeitableitung $\partial/\partial t \mapsto D_\varphi^{(0)} = \frac{\partial}{\partial t} + g_\varphi(\underline{x},t)$ (1.23')

(Ableitungen undefiniert)

Dann

$$\underline{D}_\varphi \psi e^{i\varphi} = (\underline{\nabla}\psi)e^{i\varphi} + \psi(\underline{\nabla}e^{i\varphi}) + \underline{f}_\varphi \psi e^{i\varphi}$$

$$= e^{i\varphi}\left(\underline{D}_\varphi + i\underline{\nabla}\varphi\right)\psi$$

$$\underline{D}_\varphi \equiv \underline{\nabla} + \underline{f}_\varphi \longleftrightarrow \underline{D} = \underline{\nabla} + \underline{f}_\varphi + i\nabla\varphi(\underline{x},t) \qquad (1.24)$$

$$D^{(0)}_\varphi \equiv \frac{\partial}{\partial t} + g_\varphi \longleftrightarrow D^{(0)} = \frac{\partial}{\partial t} + g_\varphi + i\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\underline{x},t)$$

Jetzt Vergleich mit (1.17),

$$\underline{A} \mapsto \underline{A} + \underline{\nabla}\chi, \quad \phi \mapsto \phi - \frac{\partial}{\partial t}\chi, \quad \chi \text{ reell}$$

$$\underline{f}_\varphi = i\alpha\underline{A}$$

$$g_\varphi = -i\alpha\phi \qquad \text{mit } \alpha \text{ reell}$$

$$\varphi = \alpha\chi$$

in der Schrödingergleichung statt $\underline{\nabla}$: $\underline{\nabla} + i\alpha\underline{A}$

statt $\frac{\partial}{\partial t}$: $\frac{\partial}{\partial t} - i\alpha\phi$

Die Felder $\underline{f}_\varphi$ und g_φ werden als <u>Eichfelder</u> bezeichnet.

Umbenennung der Kopplungskonstanten

$\alpha \mapsto -e$ liefert

$$\left\| \; i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{(\underline{p} - e\underline{A})^2}{2m}\psi + e\phi\psi \; \right\|$$

Sgl. für Masse m, Ladung e
mit skalarem Potential ϕ
Vektorpotential $\underline{A}$

global: $e^{i\varphi}$, φ = constant

lokal $e^{i\varphi}$, $\varphi = \varphi(\underline{x}, t)$ viel stärker als global!

Diskussion:

- Vorschrift $\underline{p} \mapsto \underline{p} - e\underline{A}$ heißt minimale Kopplung

- Jetzt KG gl. mit ϕ, $\underline{A}$: Ableitungen

$$\hat{\underline{p}} = \frac{\hbar}{i}\underline{\nabla} \mapsto \hat{\underline{p}} - e\underline{A} = \frac{\hbar}{i}\underline{\nabla} - e\underline{A} \qquad (1.26)$$

$$\partial_t \mapsto \frac{\partial}{\partial t} + ie\phi$$

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial t} + ie\phi\right)^2 - \left(\underline{\nabla} - ie\underline{A}\right)^2$$

$$\left(\Box + m^2\right)\Psi = 0 \mapsto \left\{\left(\frac{\partial}{\partial t} + ie\phi\right)^2 - \left(\underline{\nabla} - ie\underline{A}\right)^2 + m^2\right\}\Psi = 0$$

$(\hbar = c = 1)$

Anwendung: KG gl. für Coulombpotential

$\underline{A} = 0$, $e\phi = -\dfrac{Z\alpha}{r}$. Ähnlich der Sgl. für H-Atom; wir haben

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t} + ie\phi\right)^2 - \Delta + m_0^2\right\}\Psi = 0.$$

Separationsansatz

$$\Psi(r,\theta,\varphi;t) = e^{-iEt}\, \underbrace{Y_{lm}(\theta,\varphi)}_{\text{Kugelflächenfunktion}} \frac{\chi(r)}{r}$$

$\Rightarrow$ Radialgleichung für Radialwellenfkt $\chi(r)$

Dann Vergleich mit H-Atom / Sgl. (AUFGABE)

liefert

$$E = \pm m_0 \Big(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ruheenergie}}}{1} - \frac{Z^2\alpha^2}{2n^2} + \underline{\frac{Z^4\alpha^4}{n^4}\left[\frac{3}{8} - \frac{n}{2l+1}\right]} + O(Z^6\alpha^6)\Big) \quad (1.28)$$

$$n = n_r + 1 + l$$

3. Term ist die relativ. Korrektur zur kinetischen Energie.

- Damit noch keine Erklärung der Feinstruktur des H-Atoms
- KG gl. beschreibt Teilchen mit Spin 0, z. B. π-Mesonen.

Spin 1/2: Dirac-Gleichung

4. Die Dirac-Gleichung *

* Fredenhagen Schera ...

"Wurzelziehen" der KG gl.

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - e\phi\right)^2 \psi = \left((p - eA)^2 + m^2\right)\psi$$

$$\Rightarrow \quad i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(\pm\sqrt{(p-eA)^2 + m^2} + e\phi\right)\psi$$

Man könnte $+\sqrt{\;}$ Entwickeln

Dirac: Linearisierung $\rightarrow$ also

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi, \quad \hat{H} = e\phi + \underline{\alpha}(\underline{p} - eA) + \beta m$$

$$\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \beta$$ zu bestimmen

so dass z.B. für $\phi = A = 0$

$$H = \sqrt{\underline{p}^2 + m^2}$$ gelten,

$$\underline{p}^2 + m^2 = (\underline{\alpha}\,\underline{p} + \beta m)^2 = (\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta m)^2$$

Vergleich liefert:

$$\beta^2 = 1; \quad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0$$

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij} \qquad i = 1,2,3$$

Kronecker

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ Cliffordalgebra von 4x4 Matrizen