Tutorium Martin Kliesch
(Freitag) : Raum EW 184
um 12.00

24.10.2007

$$i \, \partial/\partial t \, \Psi = \hat{H} \Psi$$

$$\hat{H} = \underline{\alpha} \, \underline{p} + \beta m$$ (1.31)

hier ohne ϕ, A

Quadrieren, rel. Pyth.

$$\Rightarrow \beta^2 = 1, \qquad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0$$

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij} \qquad i=1,2,3 \qquad (1.32)$$

Zeige, dass β, α_i 4x4-Matrizen sind:

- $\hat{H}$ soll hermitsch sein, $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$: reelle Eigenwerte
  α_i und β hermitsch, $\alpha_i = \alpha_i^\dagger \equiv (\alpha_i^*)^T$
- Aus (1.32): $\beta^2 = \alpha_i^2 = \mathbb{1}$
  $\Rightarrow \beta = \beta^\dagger = \beta^{-1} \Rightarrow \beta$ ist unitär,
  ebenso α_i unitär
- $\alpha_i = -\beta\alpha_i\beta^{-1} \Rightarrow \mathrm{Tr}\,\alpha_i = -\mathrm{Tr}\,\beta\alpha_i\beta^{-1} = -\mathrm{Tr}\,\alpha_i$
  Spur
  $\Rightarrow \mathrm{Tr}\,\alpha_i = 0$
  ebenso $\mathrm{Tr}\,\beta = 0$
- $\beta^2 = \mathbb{1} \Rightarrow$ Eigenwerte $\pm\mathbb{1}$
  $\alpha_i^2 = 1 \Rightarrow$ "
  $\mathrm{Tr}\,\beta = \sum$ Eigenwerte $= 0$
  Dim β, Dim α_i gerade: $2, 4, 6, \ldots$
- 2x2 Matrizen tun es nicht:
  $N \times N$-Matrizen, p = Anzahl reeller Parameter

Matrix M	p
$N \times N$: komplex	$2N^2$
$M = M^\dagger$	N (Diag.) $+ N^2 - N = N^2$
$M = M^\dagger$, $\mathrm{Tr}\, M = 0$	$N^2 - 1$

Jetzt $N = 2$: $p = 3$ reelle Parameter

2×2-Matrizen M, $M = M^\dagger$ und $\mathrm{Tr}\, M = 0$ lassen sich als Linearkombination mit $p = 3$ reellen Parametern in der Basis der

Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1 = \sigma_x, \quad \sigma_2 = \sigma_y, \quad \sigma_3 = \sigma_z$$

$$M = \sum_{i=1}^{3} p_i \sigma_i = \underline{p}\, \underline{\sigma}$$

$$\underline{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$ Vektor der Pauli-Matrizen

$$\underline{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$$

Es gilt

$$\sigma_i^2 = 1$$

$$\sigma_i^\dagger = \sigma_i$$

$$\mathrm{Tr}\, \sigma_i = 0$$

Anti-Vertauschungsrelationen:

$$\underbrace{\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i}_{\equiv \{\sigma_i, \sigma_j\}} = 2\,\delta_{ij}$$

$\equiv \{\sigma_i, \sigma_j\}$ Anti-Kommutator

Paulimatrizen sind 3 linear unabhängige, antikommutierende, spurlose Matrizen.

<u>Aber</u>: β, α_i in (1.32) — 4 linear unabh. Matrizen

$$\boxed{\beta^2 = 1 \qquad \begin{aligned} &\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \\ &\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} \end{aligned}}$$

$\longrightarrow$ Wir brauchen 4x4-Matrizen!

<u>Hier gewählt</u>:

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_i: \text{Pauli-Matrix}$$

Es gilt $\alpha_i^2 = \mathbb{1}_{(4\times4)}$, $\beta^2 = \mathbb{1}$ ← 4x4 Einheitsmatrix

$\alpha_i = \alpha_i^\dagger$, $\beta = \beta^\dagger$, α_i, β unitär und spurlos

- Die WF in der Dirac-Gleichung

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \left(\underline{\alpha}\cdot\hat{\underline{p}} + \beta m\right)\Psi$$

4-komponentige Spinoren $\quad \Psi = \begin{pmatrix}\Psi_1(x)\\ \vdots \\ \Psi_4(x)\end{pmatrix}$

$$\hat{\underline{p}} = \frac{\hbar}{i}\underline{\nabla} = \frac{\hbar}{i}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad x = (ct, \underline{x})$$

$$\underline{\alpha}\hat{\underline{p}} = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3$$

$$= \begin{pmatrix}0 & \sigma_1\\ \sigma_1 & 0\end{pmatrix}\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix}0 & \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} & 0\end{pmatrix}\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots$$

$$\left[\begin{pmatrix}0 & \begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix}\\ \begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix} & 0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\begin{pmatrix}\Psi_1(t, x_1, x_2, x_3)\\ \Psi_2\\ \Psi_3\\ \Psi_4\end{pmatrix}\right. \qquad \Psi(x)$$

$$\beta m\Psi = m\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\\ \Psi_3\\ \Psi_4\end{pmatrix}$$

5. Dirac-Gleichung und Spin*: nichtrelativistischer Grenzfall

Dgl. mit $\underline{A}, \Phi$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \left(\underline{\alpha}\left(\hat{\underline{p}} - e\underline{A}\right) + \beta m + e\Phi\right)\Psi$$

$\hbar = c = 1$

* GREINER Bd. 6

Jetzt Ansatz / Zerlegung

$$\Psi = \begin{pmatrix}\varphi \\ \chi\end{pmatrix} \cdot e^{-imc^2/\hbar\, t}$$

$$\varphi = \begin{pmatrix}\varphi_1 \\ \varphi_2\end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix}\chi_1 \\ \chi_2\end{pmatrix}$$

Damit

$$i\,\partial/\partial t\begin{pmatrix}\varphi \\ \chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{\sigma}\left(\hat{\underline{p}} - e\underline{A}\right)\chi \\ \underline{\sigma}\left(\hat{\underline{p}} - e\underline{A}\right)\varphi\end{pmatrix} + e\Phi\begin{pmatrix}\varphi \\ \chi\end{pmatrix} - \underbrace{2mc^2}_{\text{Ruheenergie}}\begin{pmatrix}0 \\ \chi\end{pmatrix}$$

Jetzt Annahme

Ruheenergie $mc^2 \gg$ kin., pot. Energie

$$\left|mc^2\chi\right| \gg \left|i\hbar\,\partial/\partial t\,\chi\right|, \left|e\Phi\chi\right|$$

$$\Rightarrow \quad \chi \simeq \frac{1}{2mc^2}\,\underline{\sigma}\left(\underline{p} - e\underline{A}\right)\cdot\varphi$$

Einsetzen $\Rightarrow$

$$i\,\partial/\partial t\,\varphi = \frac{1}{2m}\left(\underline{\sigma}\left(\underline{p} - e\underline{A}\right)\right)^2\varphi + e\Phi\varphi$$

$\underline{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ Vektor der P.-Matrizen

Theorem: $(\underline{\sigma}\underline{A})(\underline{\sigma}\underline{B})$

$\underline{A} = (A_1, A_2, A_3)$ vektorwertiger Operator

$\underline{B} = (B_1, B_2, B_3)$

$= \underline{A}\underline{B} + i\,\underline{\sigma}(\underline{A}\times\underline{B})$

Beweis als Aufgabe

$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$

$[\sigma_j, \sigma_k] = \sigma_j\sigma_k - \sigma_k\sigma_j = 2i\,\varepsilon_{jkl}\,\sigma_l$

„Drehimpuls" VR (Vertauschungsrelationen)

$(\underline{p} - e\underline{A}) \times (\underline{p} - e\underline{A}) =$

$= -\frac{e\hbar}{i}\underline{B}$ Magnetfeld

$\underline{A} = \underline{A}(t, \underline{x})$

$[x, p] = i\hbar$

Einsetzen:

$$\boxed{i\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \left[\frac{1}{2m}(\underline{p} - e\underline{A})^2 - \frac{e\hbar}{2m}\underline{\sigma}\underline{B} + e\phi\right]\varphi}$$

Pauli-Gleichung

$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ 2komponentiger Spinor

- Spin und Magnetfeld gekoppelt.
- Spin $\frac{1}{2}$ für Elektronen

Diskussion weiter unten

6. Weitere Eigenschaften der Dirac-Gleichung (1.36)

a) Kontinuitätsgleichung

$$i \partial_t \psi = (\underline{\alpha}\, p + \beta m) \psi$$

$\psi^\dagger$ (1.36)

$(1.36)^\dagger \psi$

$$i \psi^\dagger \dot{\psi} = \psi^\dagger (\underline{\alpha}\, p + \beta m) \psi$$

$$-i \dot{\psi}^\dagger \psi = p\, \psi^\dagger \underline{\alpha}\, \psi + m\, \psi^\dagger \beta \psi$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\psi^\dagger \psi)}_{\rho} = \psi^\dagger \underline{\alpha} (p \psi) - (p \psi)^\dagger \underline{\alpha}\, \psi$$

$$= -i \sum_{k=1}^{3} \psi^\dagger \alpha_k (\partial_k \psi) + (\partial_k \psi^\dagger) \alpha_k \psi =$$

$$= -i \underbrace{\sum_k \partial_k}_{\partial} \underbrace{(\psi^\dagger \alpha_k \psi)}_{j} = -i \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \underbrace{\psi^\dagger \alpha_1 \psi} + \ldots \right)$$

$$j \quad (\cdots) \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$$

$\rho = \psi^\dagger \psi$ Dichte

$\underline{j} = \psi^\dagger \underline{\alpha}\, \psi$ Stromdichte $\qquad \underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

[W Dichte ρ setzt sich aus den 4 Komponenten des Spinors ψ | $j_k = (\cdots) \begin{pmatrix} \vdots & \alpha_k & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$

zusammen. $\qquad \beta_i = \quad (\alpha_2)$

(α_3)

b) Lorentz-Invarianz

Umdefinition der Matrizen α_k, β

$$\gamma^0 \equiv \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \gamma^k = \beta\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

„γ-Matrizen“

$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^k)^2 = -\mathbb{1} \quad k = 1,2,3$$

$$\gamma^\nu\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\nu = 2\, g^{\nu\mu} \quad \nu = 0,1,2,3$$

Zeit

$$g^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \\ & -1 & & \\ & 0 & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Raum

Nachrechnen!

Relativistische Notation:

$$x^\mu \leftrightarrow (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \underline{x})$$

kontravarianter Vierervektor

$$x_\mu \leftrightarrow (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -\underline{x})$$

kovarianter Vierervektor

- "relativist. Skalarprodukt"

$$x_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{3} x_\nu x^\nu = c^2 t^2 - \underline{x}^2$$

bleibt invariant unter Lorentztransformationen.