

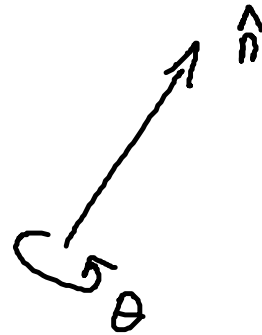
16.11.07

16.11.07 Rotationen. Drehimpuls. Spin.

3.4.2 Rotationen

Rotiere WF $\Psi(\mathbf{r})$ räumlich um Achse \hat{n}
und um Winkel θ

\Rightarrow neuer Zustand $|\Psi'\rangle$
mit WF $\Psi'(\mathbf{r}) = \Psi(R^{-1}\mathbf{r})$



R : Rotation

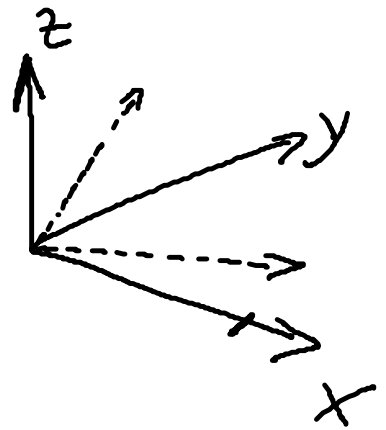
R^{-1} : Rück-Rotation

Unitäre Transformation

$$\underline{\underline{\Psi'(\underline{r}) = U_R \Psi(\underline{r}) = \Psi(R^{-1} \underline{r})}}$$

Berechnung von U_R : infinitesimale Rotation um
 z -Achse

gegen Uhrzeigersinn, Winkel θ



$$x \rightarrow x - \theta y$$

$$y \rightarrow y + \theta x$$

$$z \rightarrow z, \quad \theta \ll 1$$

Damit
$$\Psi(R^{-1} \underline{r}) = \Psi(x + \theta y, y - \theta x, z); \quad \theta \ll 1$$

$$= \Psi(\underline{r}) + \underbrace{\theta (y \partial_x + (-x) \partial_y)}_{y \partial_x - x \partial_y} \Psi(\underline{r}) + O(\theta^2)$$

ist \propto z -Komponente des Drehimpulsoperators \underline{L}

$$\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p} = \frac{\hbar}{i} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{i} (\dots, \dots, x\partial_y - y\partial_x)$$

$$\equiv (L_x, L_y, L_z) \Rightarrow L_z = \frac{\hbar}{i} (x\partial_y - y\partial_x)$$

Jetzt $U_R \Psi(\underline{r}) = \Psi(R^{-1}\underline{r}) =$

$$= \left(1 - \frac{i}{\hbar} \theta L_z + \dots\right) \Psi(\underline{r})$$

$$\Rightarrow U_R = 1 - \frac{i}{\hbar} \theta \hat{L}_z + \dots$$

$$\Rightarrow U_R = 1 - \frac{i}{\hbar} \theta \hat{n} \cdot \hat{\underline{L}} + \dots \quad \text{für beliebige Drehachse } \underline{n}$$

für endliche Winkel θ ist

$$U_R = e^{-\frac{i}{\hbar} \theta \hat{n} \cdot \hat{\underline{L}}}$$

Der Bahn-Drehimpulsoperator $\underline{L} \equiv \underline{r} \times \underline{p}$ ist der Erzeuger räumlicher Rotationen.

Bem.:



3.5 Drehimpuls - VR (Vertauschungsrelationen)

a) Bahndrehimpuls: $\underline{\hat{L}} = \underline{\hat{r}} \times \underline{\hat{p}}$,
 $\underline{L} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$

Jetzt Kommutator

$$[L_j, L_k] = i\hbar \epsilon_{jkl} L_l$$

z.B. $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$ (+ zyklisch)

Allgemeiner stellt man jetzt die VR an den Anfang; man fordert

$$[F_j, F_k] = i \epsilon_{jkl} F_l$$

als Ausgangspunkt.

1) Definiert $\underline{F}^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2$

$$\Rightarrow [\underline{F}^2, F_z] = 0 \quad (\text{Aufgabe})$$

$\Rightarrow \underline{F}^2$ und F_z haben gemeinsames System von Eigenfunktionen

$$J^2 |\lambda \nu\rangle = \lambda |\lambda \nu\rangle$$

$$J_3 |\lambda \nu\rangle = m_\nu |\lambda \nu\rangle$$

Definiere Auf-/Absteige-Operatoren
(Schiebeoperatoren)

$$J_\pm = J_1 \pm i J_2, \quad J_- = J_+^\dagger$$

$$\Rightarrow [J_3, J_\pm] = \pm J_\pm \quad (\text{Nachrechnen})$$

$\parallel |n\rangle$

Es gilt

$$2) \quad \hat{J}_- \hat{J}_+ |\lambda \nu\rangle = (\lambda - m_\nu^2 - m_\nu) |\lambda \nu\rangle$$

$$\left(\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3 \right)$$

sind hermitesche Operatoren,
die die Drehimpuls-VR
erfüllen.

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \psi_{\lambda \nu} \\ \downarrow \\ |\alpha\rangle \end{array}$$

Außerdem $\lambda - m_\nu^2 - m_\nu \geq 0$

2) als AUFGABE

$$3) \quad J_3 \underbrace{J_+}_{\text{erhöht die Quantenzahl } m_\nu \text{ um Eins.}} |\lambda \nu\rangle = (m_\nu + 1) |\lambda \nu\rangle$$

Andererseits ist m_ν beschränkt.

$\Rightarrow \exists$ ein $m_{22} = j$ als größtes m_{22} ,
 d.h. $j \geq m_{22}$

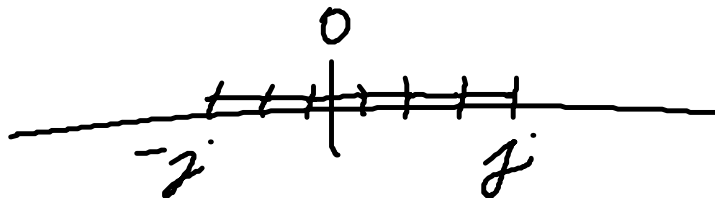
Hierfür $\lambda = j(j+1)$ (AUFGABE).

Anwendung von \mathcal{F} analog, führt zu
 $m_{22} \rightarrow m_{22} - 1$.

Es existiert minimales $m_{22} = -j$, wo
 das Absteigen aufhört.

Es gilt $-j \leq m_{22} \leq j$

Von $-j$ nach j kommt man in ganzzahligen
 Schritten.



$j = 1$ ✓

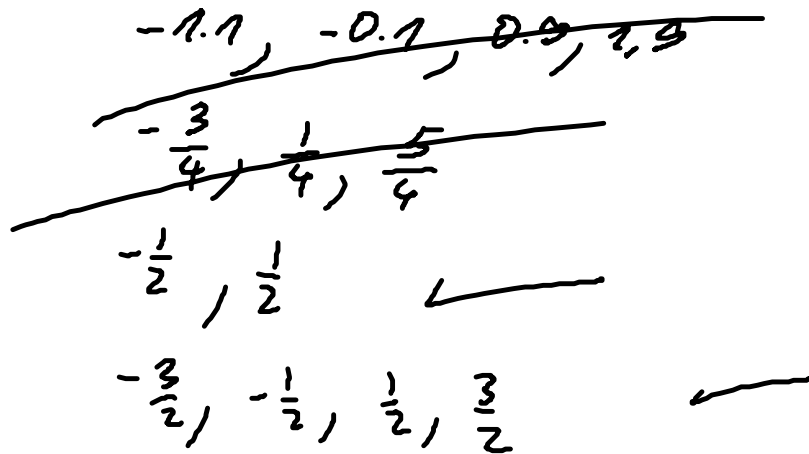
$j = 2$

$j = 1.1$

$j = \frac{3}{4}$

$j = \frac{1}{2}$

$j = \frac{3}{2}$



$$\Rightarrow j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$$

$\| j \text{ ist entweder ganzzahlig} \|$
 $\| \text{ oder halb-ganzzahlig} \|$

Für festes j : $2j+1$ Eigenwerte
m von J_z

$$J^2 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle$$

$$J_z |j, m\rangle = m |j, m\rangle$$

$$J_{\pm} |j, m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle$$

(AUFGABE)

3.6. Der Spin

3.6.1. Empirische H.-weise

Stem-festach-Versuch: Atomstrahl mit Ag-Atomen
durch inhomogenes Magnetfeld $(0, 0, B_z)$ abgelenkt.

Magnetisches Moment $\underline{\mu} \Rightarrow$ Potential $-\underline{\mu} \underline{B}$

$$\text{Kraft } \underline{F} = -\underline{\nabla}(-\underline{\mu} \underline{B}) = (0, 0, \mu_z \frac{\partial}{\partial z} B_z)$$



Wir haben in der Pauli-Gleichung

$$\hat{H}_{\sigma B} = -g_e \frac{e\hbar}{2m} \underline{\sigma} \underline{B}, \quad g_e = 1 \text{ in Dirac-Theorie}$$

$$\mu_B \equiv \frac{e\hbar}{2m} \quad \text{Bohrsches Magneton}$$

$$\underline{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

$$\hat{\underline{\mu}} \equiv g_e \mu_B \underline{\sigma} \quad \text{magn. Moment}$$

$$\text{Proton } g_p = 2.79 \dots$$

$$g_n = -1.91 \dots$$

3.6.2. Operator des Spins-Drehimpulses (Spin $\frac{1}{2}$).

$$\hat{S}_j; \quad [S_j, S_k] = i \epsilon_{jkl} S_l$$

$$S^2 |s, m\rangle = s(s+1) |s, m\rangle$$

$$S_z |s, m\rangle = m |s, m\rangle; \quad s = \frac{1}{2}, \quad m = \pm \frac{1}{2}$$

Darstellung mit Pauli-Matrizen

$$S_k = \frac{\hbar}{2} \sigma_k, \quad [\sigma_j, \sigma_k] = 2i \varepsilon_{jkl} \sigma_l$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.6.3 Drehung der Stern-Gerlach-Apparatur

in z-Richtung: $|\uparrow, \hat{e}_z\rangle, |\downarrow, \hat{e}_z\rangle$
zwei Spinoren

Jetzt \hat{n} -Richtung $\hat{n} \cdot \hat{\sigma} = \dots$

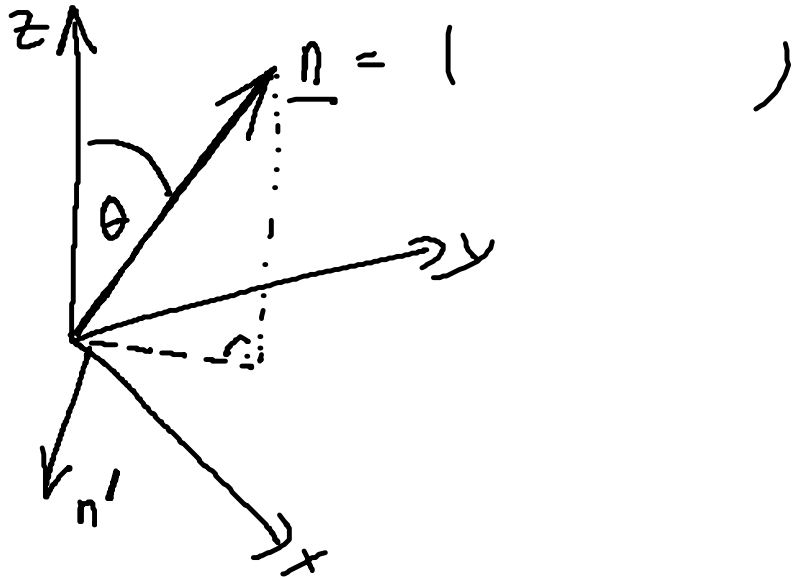
$$\underline{n} = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$$

$$|\uparrow, \underline{n}\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}; \quad |\downarrow, \underline{n}\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \\ \cos\frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

Ew-Gleichung $S_z |m, \underline{e}_z\rangle = m |m, \underline{e}_z\rangle$

gilt auch im System mit Magnetfeld in

\underline{n} - Richtung.



$$\underline{n}' = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$$

Dreht z-Achse um Achse \underline{n}'
um Winkel θ drehen.

$$S_3 |m e_z\rangle = m |m e_z\rangle / U_{n'}(\theta)$$

$$\underbrace{U_{n'}(\theta) S_3 U_{n'}^\dagger(\theta)}_1 U_{n'}(\theta) |m e_z\rangle = m \underbrace{U_{n'}(\theta)}_{\dots} |m e_z\rangle$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2} \underline{n} \cdot \underline{\sigma}}_m |m, \hat{n}\rangle = m |m, \hat{n}\rangle, \quad m = \pm \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \underline{n} \cdot \underline{\sigma} = U_{n'}(\theta) S_z U_{n'}^\dagger(\theta); \quad |m, \underline{n}\rangle = U_{n'}(\theta) |m, e_z\rangle$$

Direkter Vergleich liefert (AUFGABE)

$$U_{n'}(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \underline{n}' \cdot \underline{\sigma} = e^{-i \frac{\theta}{2} \underline{n}' \cdot \underline{\sigma}}$$

Beachte: $\frac{\theta}{2}$.

$$\bullet u_{n'}(2\pi) = \underline{-1}$$