21.11. Korrektur Aufgabe 21, 2.: (Blatt 6)

Zustände $|m, \hat{n}\rangle$

statt $|m, \hat{e}_z\rangle$!

21.11.

Zeeman-Aufspaltung

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi, \quad H = \frac{(p - e\underline{A})^2}{2m} + e\phi(r)$$

$$-\frac{e\hbar}{2m}\,\underline{\sigma}\,\underline{B}\Big)\quad \text{Pauli-Gleichung}$$

Jetzt für H-Atom $\phi(r) \propto \frac{1}{r}$

Magnetfeld mit Vektorpotential

$$\underline{A} = \frac{1}{2}\,\underline{B}\times\underline{r}\quad,\qquad \underline{\nabla}\,\underline{A} = 0$$

(Coulomb-Eichung)

Umformung

$$\frac{1}{2m}\Big(\underline{p}^2 - e\big(\underline{A}\,\underline{p} + \underbrace{\underline{p}\,\underline{A}}_{\underline{A}\,\underline{p}\ \text{wegen}\ \underline{\nabla}\,\underline{A}=0}\big) + e^2\underline{A}^2\Big) = \qquad \underline{p} = \frac{\hbar}{i}\underline{\nabla}$$

$=$

$$= \frac{1}{2m}\Big(\underline{p}^2 - e\,2\,\underline{A}\,\underline{p} + e^2\underline{A}^2\Big)$$

$$= \frac{1}{2m}p^2 - \frac{e}{m}\,\frac{1}{2}\big(\underline{B}\times\underline{r}\big)\underline{p} + \frac{1}{8}\frac{e^2}{m}\big(\underline{B}\times\underline{r}\big)^2$$

zyklisch

$$\underbrace{\big(\underline{r}\times\underline{p}\big)}_{\underline{L}\ \text{Drehimpuls}}\cdot\underline{B}\qquad\qquad \underline{\nabla}\,\underline{B} = 0$$

Damit insgesamt

$$\hat{H} = \underbrace{\frac{\underline{p}^2}{2m} + e\,\phi(r)}_{\text{Wasserstoff-Atom ohne } \underline{B}\text{-Feld}} + \frac{\mu_B}{\hbar}\underbrace{\big(\underline{L} + \hbar\,\underline{\sigma}\big)}_{\text{Bahndrehimpuls } \underline{L}\ +\ \text{Spin}}\underline{B} + \frac{e^2}{8m}\big(\underline{B}\times\underline{r}\big)^2$$

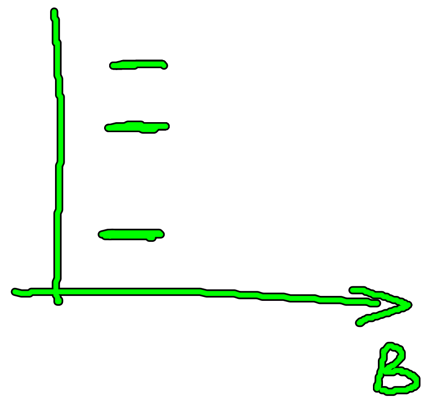
$\mu_B = -\frac{e\hbar}{2m}$ Bohr-Magneton.

Jetzt die Änderung des Spektrums durch das $\underline{B}$-Feld berechnen.

1) Annahme: $\underline{B}$-Feld sehr klein, vernachlässige $(B \times r)^2$

2) $\hat{H} = H_0 + V$; $H_0 = \frac{p^2}{2m} + e\Phi(r)$

$$V = \frac{\mu_B}{\hbar}(\underline{L} + \hbar\underline{\sigma})\underline{B}$$



$|nlm\rangle$ Eigenzustände von H_0 mit Energien E_n^0

mit Spin:

$$|nlm\sigma\rangle = \underbrace{|nlm\rangle}_{\text{Bahn}} \otimes \underbrace{|\sigma\rangle}_{\text{Spin}}$$

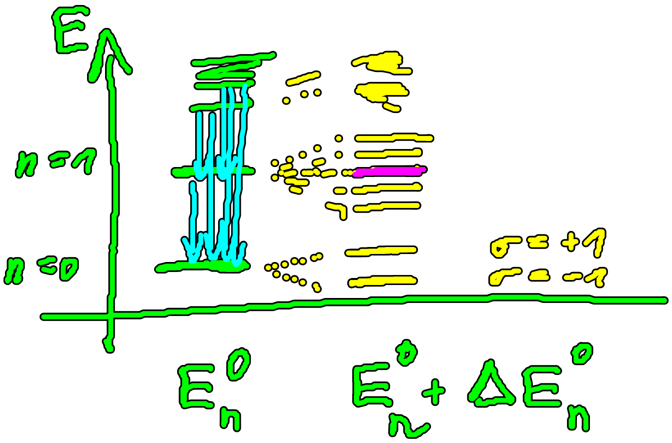
Spin: Spinor-Eigenzustand von $\underline{\sigma}\,\underline{B}/|\underline{B}|$

$H|n l m \sigma\rangle$ berechnen:

zugehörige Energien $E_{nlm\sigma} = E_n^0 + \mu_B B(m+\sigma) + O(B^2)$

$n=0$: $m=0$, $\sigma=\pm 1$

$n=1$: $m=0,\pm 1$, $\sigma = \pm 1$



$\Delta E^0_{n=1} = \mu_B B(m+\sigma)$

$\sigma \backslash m$	0	1	−1
1	1	2	0
−1	−1	0	−2

Durch das Magnetfeld wird die ursprüngliche Entartung der Niveaus (teilweise) aufgehoben.

3.7. Addition von Drehimpulsen

$\underline{J}_1 + \underline{J}_2 \equiv \underline{J}$ Gesamt-Drehimpuls

$$\mathcal{J}^2 |j\,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j\,m\rangle$$

$$\mathcal{J}_z |j\,m\rangle = \hbar m |j\,m\rangle$$

$$\mathcal{J}_1^2 |j_1\,m_1\rangle = \hbar^2 j_1(j_1+1)|j_1\,m_1\rangle$$

$$\mathcal{J}_{1,z} |j_1\,m_1\rangle = \hbar m_1 |j_1\,m_1\rangle$$

Basis $|j_1\,m_1\rangle \otimes |j_2\,m_2\rangle$ = span $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$

Basis $|j\,m\rangle$ = span $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \,; \quad \dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{H}_1 \cdot \dim \mathcal{H}_2$$

Beispiel $j_1 = l$, $j_2 = s = \frac{1}{2}$

Wellenfunktionen $|l\,m\,\sigma\rangle = |l\,m\rangle \cdot |\sigma\rangle$

$l = 1$:

$$Y_{10} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad Y_{10} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$Y_{11} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad Y_{11} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$Y_{1-1} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad Y_{1-1} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

j_1 und j_2 als gegeben.

- Eigenzustände $|j\,m\rangle$ sind auch EZ von $\mathcal{J}_1^2$ und $\mathcal{J}_2^2$.

$$\Rightarrow \quad |jm\rangle = \sum_{m_1 m_2} c^{j j_1 j_2}_{m_1 m_2} |j_1 m_1\rangle \cdot |j_2 m_2\rangle$$

$$= \sum_{m_1 m_2} \langle m_1 m_2 | jm\rangle \, |m_1 m_2\rangle$$

$$\sum_{m_1 m_2} |m_1 m_2\rangle\langle m_1 m_2| = \mathbb{1}$$

Clebsch-Gordan Koeffizienten.

Rekursion für Clebsch-Gordan-Koeff.

1) $J_z = J_{1,z} + J_{2,z}$ anwenden

$$J_z |jm\rangle = m|jm\rangle = \sum_{m_1 m_2} \langle m_1 m_2 | jm\rangle (m_1 + m_2) |m_1 m_2\rangle$$

$$= \sum_{m_1 m_2} \langle m_1 m_2 | jm\rangle \, m \, |m_1 m_2\rangle$$

$$\langle m_1 m_2 | jm\rangle = \delta_{m_1+m_2, m} \langle m_1 \, m-m_1 | jm\rangle$$

z-Q.zahlen addieren sich.

2) Anwendung von $J_\pm$

$$J_\pm |jm\rangle = \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)} \, |j \, m\pm 1\rangle$$

$$= \sum \langle m_1 m_2 | jm\rangle \sqrt{(j_1 \mp m_1)(j_1 \pm m_1 + 1)} \, |m_1 \pm 1, m_2\rangle$$

$$+\sum_{m_1 m_2}^{m_1 m_2} \langle m_1 m_2 | j m \rangle \sqrt{(j_2 \mp m_2)(j_2 \pm m_2 + 1)}\, | m_1, m_2 \pm 1 \rangle .$$

Skalar mit $\langle m_1 m_2 |$ multipl.

$\Rightarrow$ Rekursionsformel herleiten :

$$\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\, \langle m_1 m_2 | j\, m \pm 1 \rangle =$$

$$= \langle m_1 \mp 1\, m_2 | j m \rangle \sqrt{(j_1 \pm m_1)(j_1 \mp m_1 + 1)}$$
$$+ \langle m_1\, m_2 \mp 1 | j m \rangle \sqrt{(j_2 \pm m_2)(j_2 \mp m_2 + 1)}$$

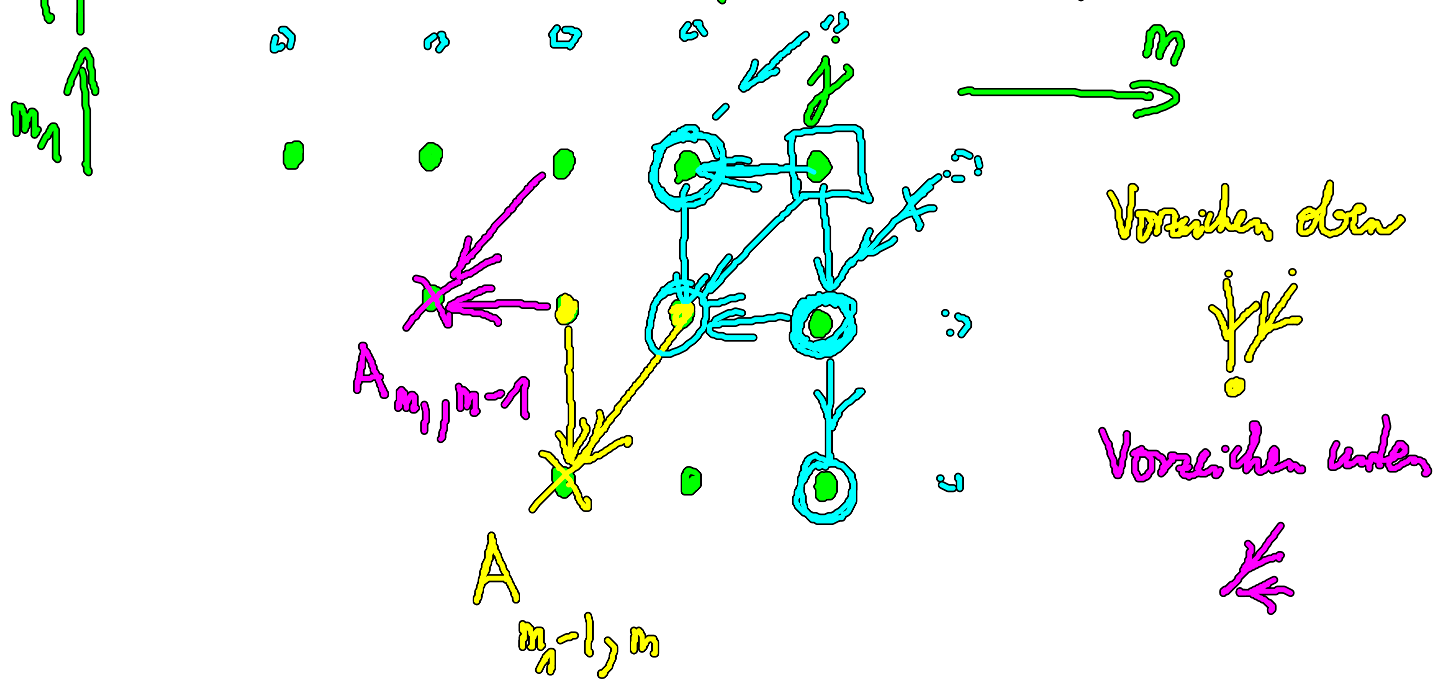
Wir fixieren j : CG Koeff. sind Größen mit zwei Indizes m_1, m,

$$A_{m_1 m} \Longleftrightarrow \langle m_1 m_2 | j m \rangle$$

Rekursion hat Struktur

$$\| \; a A_{m_1, m} + b A_{m_1 \mp 1, m} + c A_{m_1, m \pm 1} = 0 \; \|$$

Auffassen als Rekursion auf Rechteck-Gitter



D $A_{m_1 = j_1, \, m = j}$ festlegen $\Rightarrow$ alle festgelegt.

$m_1 = j_1$ maximaler Wert für m_1, $m = j$ maximal

$$\langle j_1 \, \underbrace{m_2 = j - j_1} \, | \, j j \rangle$$

$$-j_2 \le m_2 = j - j_1 \le j_2$$

$$\Rightarrow \; \| \; j_1 - j_2 \le j \le j_1 + j_2 \; \|$$

Dieselbe Konstr. $1 \leftrightarrow 2$

$$\| \; j_2 - j_1 \le j \le j_1 + j_2 \; \|$$

$$\Rightarrow \quad |j_1 - j_2| \le j \le j_1 + j_2$$

„Dreiecks-Bedingung"

j läuft also über $j = j_1 + j_2,\ j_1 + j_2 - 1,\ \ldots,\ |j_1 - j_2|$

Anzahl der Kets $|jm\rangle$ = OK!

$$\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (2j+1) = (2j_1+1)\cdot(2j_2+1)$$

Nachrechnen