

23.11.2007

23.11.07

$$\underline{J} = \underline{J}_1 + \underline{J}_2$$

$$|j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} \underbrace{\langle m_1, m_2 | j, m \rangle}_{\text{CG-Koeffizienten}} \underbrace{|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle}_{= |m_1, m_2\rangle}$$

Fall:  $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$

---

Zwei  $\text{Spin}^{-\frac{1}{2}}$ -Teilchen

Hilbertraum  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$

Basis:  $|\uparrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 \equiv |\uparrow\uparrow\rangle$

$$|\uparrow\downarrow\rangle$$

$$|\downarrow\uparrow\rangle$$

$$|\downarrow\downarrow\rangle$$

4 Basiszustände

Übergang zu einer Basis aus Eigenzuständen  
von  $S^2 = \mathcal{J}^2$  und  $S_z = \mathcal{J}_z$

$$\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2$$

Basiszustände  $|j, m\rangle \equiv |S, S_z\rangle$

$$|S\rangle \equiv |S=0, S_z=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

$$(|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - \overset{\text{Singlett}}{|\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2})$$

$$|\pi_1\rangle \equiv |S=1, S_z=1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$$

$$|\pi_0\rangle \equiv |S=1, S_z=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \left. \vphantom{|\pi_0\rangle} \right\} \text{Triplets}$$

$$|\pi_{-1}\rangle \equiv |S=1, S_z=-1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$$

$$S^2 |S\rangle = 0$$

$$S^2 |T_i\rangle = S(S+1) |T_i\rangle$$

$$= 1 \cdot (1+1) |T_i\rangle$$

$$i = 1, 0, -1$$

$ \uparrow\uparrow\rangle$	$ S\rangle$	$ S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} ( \uparrow\uparrow\rangle -  \downarrow\downarrow\rangle)$
$ \uparrow\downarrow\rangle$	$ T_1\rangle$	$\phi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} ( \uparrow\uparrow\rangle +  \downarrow\downarrow\rangle)$
$ \downarrow\uparrow\rangle$	$ T_0\rangle$	$ T_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} ( \uparrow\downarrow\rangle +  \downarrow\uparrow\rangle)$
$ \downarrow\downarrow\rangle$	$ T_{-1}\rangle$	$\phi_- = \frac{1}{\sqrt{2}} ( \uparrow\uparrow\rangle -  \downarrow\downarrow\rangle)$
Ausgangsbasis	gesamtspin-EZ	Bell-Basis

$$\bullet \quad |\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2$$

verschränkt

### 3.8. Spin-Bahn-Kopplung und Feinstruktur des Wasserstoffatoms

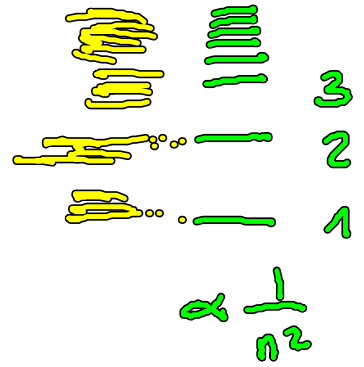
Γ  
L

Freies  
Nutting  
Schere

Stammann  
Zandau  
Merzbacher

Baym  
Schiff  
Sakurai

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$



Relativistische Korrekturen aus der

Dirac-Gleichung:

Treten als Zusatzterm  $\hat{H}_1$  zu  $\hat{H}_0$  auf

$$\hat{H}_1 = \hat{H}_{KE} + \hat{H}_{\text{Darwin}} + \hat{H}_{SO}$$

1)  $E = \sqrt{p^2 + m^2} =$   $c = \hbar = 1$

$$= m \sqrt{1 + \left(\frac{p}{m}\right)^2}$$

$$= m \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m^2} \right\} - \frac{1}{2m} \frac{p^4}{4m^2} + \dots$$

↑
↑
↑

## 2) Darwin-Term

Aus der Dirac-Gleichung

$$\mathcal{H}_{\text{Darwin}} = \frac{-\hbar^2}{8m^2 c^2} \Delta \phi(r)$$

$$\phi(r) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r} ; \quad \Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(r)$$

### 3) Spin-Bahn-Wechselwirkung

Aus der Dirac-Gleichung

$$\hat{H}_{SO} = \frac{e\hbar}{4m^2c^2} \underline{\sigma} \left( \underline{E}(\underline{r}) \times \underline{p} \right)$$

$$\underline{E}(\underline{r}) = -\underline{\nabla} \phi(r)$$

$$\underline{p} = m\underline{v}$$

$$\underline{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z); \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Elektron im  $\underline{E}$ -Feld des Kerns, sieht ein  
Magnetfeld

$$\underline{B} = -\frac{\underline{v} \times \underline{E}}{c^2}.$$

Elektron hat magnetisches Moment

$$\underline{\mu} = -\frac{e}{m} \underline{S}, \quad \underline{S} = \frac{1}{2} \hbar \underline{\sigma}.$$

$$-\underline{v} \times \underline{E} = \underline{v} \times \nabla \frac{ze}{4\pi\epsilon_0 r} = \underline{v} \times \frac{\underline{r}}{r} \frac{d}{dr} \frac{ze}{4\pi\epsilon_0 r} =$$

$$\left[ \underline{L} = \underline{r} \times (\underline{v} \cdot m) \right] = \frac{1}{m} \underline{L} \frac{ze}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$\underline{L}$ : Bahndrehimpuls

$$H_{SO} = -\mu \underline{B} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2m^2c^2} \frac{\hat{\underline{S}} \cdot \hat{\underline{L}}}{r^3}$$

↑  
Faktor 2  
hier ohne Herleitung.

---

gesamt Drehimpuls  $\underline{J} = \underline{L} + \underline{S}$

ohne rel. Korrekturen:  $E_n, |nlsm_n s\rangle$

||  
 $\frac{1}{2}$      $\sigma$

Übergang zu neuer Basis  $|nl s j m\rangle$

$$j = l+s, l+s-1, \dots, |l-s|$$

$$m = m_l + m_s$$

Hier  $s = \frac{1}{2}$ , deshalb  $j = l + \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}$  für  $l \geq 1$

$j = \frac{1}{2}$  für  $l = 0$

Schreibe  $\hat{\underline{S}} \cdot \hat{\underline{L}} = \frac{1}{2} (\hat{\underline{J}}^2 - \hat{\underline{L}}^2 - \hat{\underline{S}}^2)$

$\underline{J} = \underline{L} + \underline{S}$

$$\langle nl s j m | \hat{\underline{S}} \cdot \hat{\underline{L}} | nl s j m \rangle = \frac{1}{2} \hbar^2 \{ j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \}$$

Fall  $j = l + \frac{1}{2}$  :

$$\langle n l s j m | \hat{H}_{SO} | n l s j m \rangle = \frac{Z e^2}{4 \pi \epsilon_0} \frac{1}{2 m^2 c^2} \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle_{n l} \cdot \frac{1}{2} \hbar^2 \cdot l$$

Bahnanteile der Wellenfunktion

Fall  $j = l - \frac{1}{2}$

$$= \frac{Z e^2}{4 \pi \epsilon_0} \frac{1}{2 m^2 c^2} \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle_{n l} \cdot \frac{1}{2} \hbar^2 \cdot (-1)(l+1)$$

Benötigen

$$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle_{n l} = \frac{Z^3}{a_0^3} \frac{2}{n^3 l(l+1)(2l+1)}, \quad l \neq 0$$

$$\Rightarrow E'_{SO} = \frac{Z^4 e^2 \hbar^2}{2 m^2 c^2 a_0^3 4 \pi \epsilon_0} \frac{1}{n^3 l(l+1)(2l+1)} \begin{cases} l & j = l + \frac{1}{2} \\ -(l+1) & j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

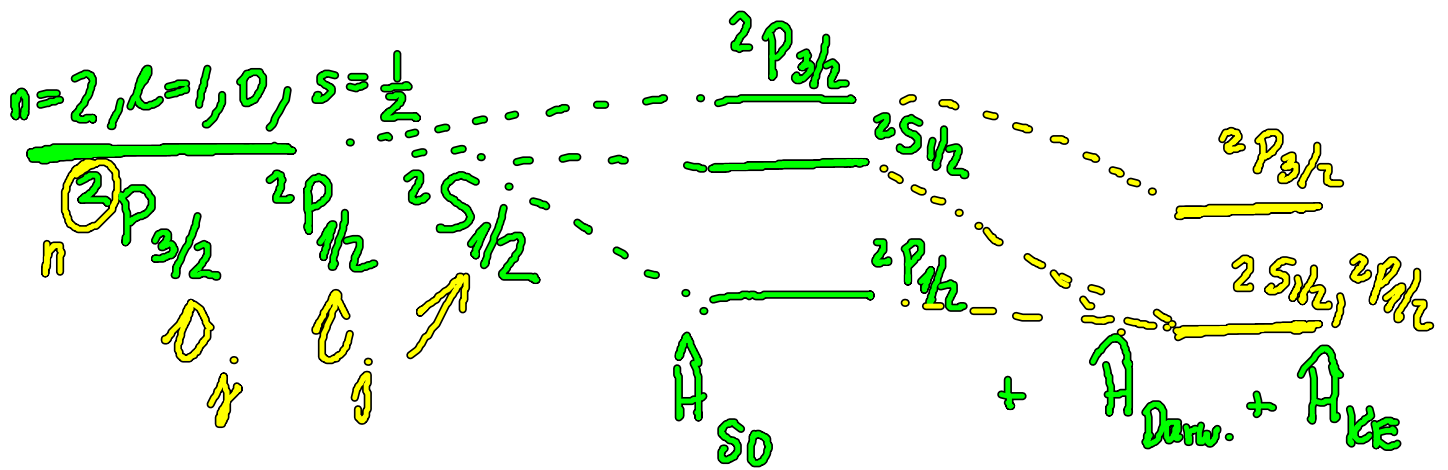
Alles zusammenfassen

$$E_{n l s j m} = E_n^{(0)} + \frac{[E_n^{(0)}]^2}{2 m c^2} \left[ 3 - \frac{4 n}{j + \frac{1}{2}} \right]$$

$$j = l \pm \frac{1}{2} \quad \underline{l \neq 0}$$

Gasiorowicz falsch!

<http://hep.ucsd.edu/branson>



### Bemerkung

Spin-Bahn-WW auch in Festkörpern:

$$H_{SO} = \frac{e\hbar}{4m^2c^2} \sigma (\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{p})$$

↑  
interne elektrische  
Felder

z.B. in 2dim. Elektronengasen (2DEG).

⇒ Rashba-Parameter  $d$

$$H_{SO} = -\frac{d}{\hbar} [\mathbf{p} \times \boldsymbol{\sigma}]_z .$$