

7.12.

7.12.07

4.5. Verschränkung

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow, \hat{z}\rangle_A \cdot |\downarrow, \hat{z}\rangle_B - |\downarrow, \hat{z}\rangle_A |\uparrow, \hat{z}\rangle_B \right)$$

$\hat{z} = \hat{e}_z$ Einheitsvektor, also z.B.

$$|\uparrow, \hat{z}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow, \hat{z}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zwei Spins auf Atomen A und B

1) Atome wechselwirken, Spin (ferentspin) sei danach im Zustand $|S\rangle$

2) Atome werden voneinander getrennt, Spin ändert sich nicht.

3) Beobachter A (Alice) nimmt Atom A nach Austritt.

Beobachter B (Bob) nimmt Atom B nach Berlin.

Orte A, B beliebig weit voneinander entfernt.

Sehr viele Paare A, B im Gedankenexperiment.

Fast Messungen.

a) Alice misst ihren Spin in \hat{z} -Richtung.

Findet A z.B. Spin $|\uparrow, \hat{z}\rangle_A$, so muß

Bob Spin $|\downarrow, \hat{z}\rangle_B$ messen.

b) Alice misst ihren Spin in \hat{z} -Richtung.
Bob misst seinen Spin in \hat{x} -Richtung und bekommt $|\uparrow, \hat{x}\rangle_B$ bzw. $|\downarrow, \hat{x}\rangle_B$ mit Wahrscheinlichkeit $1/2$, unabhängig davon, was Alice misst.

c) Alice misst ihren Spin in \hat{x} -Richtung.
Falls sie $|\uparrow, \hat{x}\rangle_A$ findet, muß Bob $|\downarrow, \hat{x}\rangle_B$ finden:

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow, \hat{n}\rangle_A |\downarrow, \hat{n}\rangle_B - |\downarrow, \hat{n}\rangle_A |\uparrow, \hat{n}\rangle_B).$$

Bob's Messergebnisse hängen davon ab, ob und wie (in welche Richtung) Alice misst, obwohl beide räumlich voneinander getrennt sind.

Bobs Zustand ist durch seine Dichtematrix (reduzierte Dichtematrix) beschrieben,

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_B &= \text{Tr}_A |S\rangle\langle S| = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

keine Information! \uparrow oder \downarrow mit gleicher Wahrscheinlichkeit ..

Es gibt Korrelationen zwischen den Messergebnissen in A und denen in B.
Allerdings lassen sich damit keine Informationen übertragen.

Def.: „Einklein-Lokalität“: Die gesamte Physik in B sollte nur lokal durch den Spin B gegeben sein und nicht mehr davon abhängig sein, was in A (raumartig getrennt) passiert.
Eine vollständige Beschreibung der Physik in B sollte ergeben, dass Spin B nicht mit Spin A korreliert ist.

⇒ QM wäre danach eine unvollständige Beschreibung der Natur.

Def.: Versteckte-Variablen-Theorien:
Ein Spin $|\uparrow\rangle$ (in \hat{n} -Richtung) wird durch $|\uparrow, \hat{n}; \{\lambda\}\rangle$ beschrieben, wobei $\{\lambda\}$ unbekannte Parameter sind. Wäre $\{\lambda\}$ bekannt, so wären alle Messwerte des Spins deterministisch.

Bell'sche Ungleichungen

A misst Spin in \hat{n} -Richtung :

Falls $|\uparrow, \hat{n}\rangle_A \Rightarrow |\downarrow, \hat{n}\rangle_B$

Falls $|\downarrow, \hat{n}\rangle_A \Rightarrow |\uparrow, \hat{n}\rangle_B = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}_B$

$$|| |\uparrow, \hat{n}\rangle_B = \underbrace{\cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2}}_{\text{Wahrscheinlichkeit (gemeinsame Ereignisse)}} |\uparrow, \hat{z}\rangle_B + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} \underbrace{|\downarrow, \hat{z}\rangle_B}_{\substack{\hat{z} \text{ Bob} \\ \hat{n} \text{ Alice}}}$$

Wahrscheinlichkeit (gemeinsame Ereignisse)

$$W(\downarrow_A, \uparrow_B) = \frac{1}{2} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ = W(\uparrow_A, \downarrow_B)$$

$$W(\downarrow_A, \downarrow_B) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Verdeckte Variablen-Theorem:

3 Richtungen $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$

Variablen legen fest, ob + oder - (\uparrow oder \downarrow)
in Richtung \hat{a} (oder \hat{b} , oder \hat{c}) gemessen wird.

Tabelle:

Teilchen A

Teilchen B

N_1	$(\hat{a}_+, \hat{b}_+, \hat{c}_+)$	$(\hat{a}_-, \hat{b}_-, \hat{c}_-)$
N_2	$(\hat{a}_+, \hat{b}_+, \hat{c}_-)$	$(\hat{a}_-, \hat{b}_-, \hat{c}_+)$
N_3	$(a_+ b_- c_+)$	$(a_- b_+ c_-)$
N_4	$(a_+ b_- c_-)$	$(a_- b_+ c_+)$
N_5		
N_6		
N_7	$(a_- b_- c_+)$	$(a_+ b_+ c_-)$
N_8		

8 relative Häufigkeiten

$$p_i = \frac{N_i}{\sum_{i=1}^8 N_i}, \quad 0 \leq p_i \leq 1$$

Beispiel: Quanten system im Zustand 3:
 Mia \hat{a}_+
 Bob $\hat{a}_- \quad \hat{b}_+ \quad \text{etc.}$

Wir können Wahrscheinlichkeiten

$$P(\hat{a}_+; \hat{b}_+) = p_3 + p_4$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 Mia Bob

$$P(\hat{a}_t; \hat{c}_t) = p_2 + p_4$$

$$P(\hat{c}_t; \hat{b}_t) = p_3 + p_7$$

Es gilt $p_i \geq 0$; deshalb

$$p_3 + p_4 \leq \underbrace{p_3 + p_4 + p_2 + p_7}$$

$$\Rightarrow P(\hat{a}_t; \hat{b}_t) \leq P(\hat{a}_t, \hat{c}_t) + P(\hat{c}_t; \hat{b}_t)$$

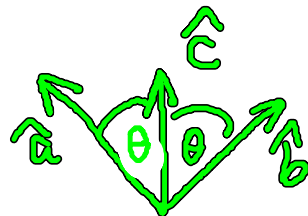
Ist eine Form der Bellschen Ungleichungen.

$$P(\hat{a}_t, \hat{b}_t) \triangleq W(\uparrow \hat{a}, \uparrow \hat{b}) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_{\hat{a}\hat{b}}}{2},$$

wobei $\theta_{\hat{a}\hat{b}} = \angle(\hat{a}, \hat{b})$ ist.

Wir zeigen: die qm. Wahrscheinlichkeiten verletzen die Bellschen Ungleichungen.

$$\theta_{\hat{a}\hat{b}} = 2\theta$$



$$\theta = \theta_{\hat{a}\hat{c}} = \theta_{\hat{c}\hat{b}}$$

Mit $P = W$

AUFGABE. $\sin^2 \theta \leq \sin^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$

↙ für $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
→ QM ist in Widerspruch mit
versteckten-Variablen-Theorien.

Aspect : Experiment mit verschränkten
Photonen (1982)

⇒ Verletzung der Bell'schen Ungleichungen.
also kein Widerspruch zu QM.

Lit: J.J. Sakurai