Zeitabhängige Störungstheorie

$$H(t) = H_0 + V(t)$$

zeitabh. Störung

Schrödinger-Gleichung $\quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = H(t)|\Psi(t)\rangle \quad (*)$

Wechselwirkungsbild:

Definition: $\quad |\Psi(t)\rangle_I \equiv e^{iH_0 t}|\Psi(t)\rangle \qquad (**)$

Jetzt Sgl. für $|\Psi(t)\rangle_I \Rightarrow$ ← 'interaction picture' („Dirac-Bild")

$$\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle_I = iH_0|\Psi(t)\rangle_I + e^{iH_0 t}\underbrace{\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle}_{(*)\text{ einsetzen}}$$

$\hbar = 1$

$$= iH_0|\Psi(t)\rangle_I + e^{iH_0 t}(-i)\left[H_0 + V(t)\right]\overbrace{|\Psi(t)\rangle}^{(**)\ e^{-iH_0 t}|\Psi(t)\rangle_I}$$

$$= iH_0|\Psi(t)\rangle_I - i\, e^{iH_0 t}\left[H_0 + V(t)\right]e^{-iH_0 t}|\Psi(t)\rangle_I$$

$$e^{iH_0 t} H_0 e^{-iH_0 t} = H_0$$

$$= -i \underbrace{e^{iH_0 t} V(t) e^{-iH_0 t}}_{\equiv V_I(t)} |\psi(t)\rangle_I$$

$$= -i V_I(t) |\psi(t)\rangle_I$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I &= V_I(t) |\psi(t)\rangle_I \\ V_I(t) &\equiv e^{iH_0 t} V(t) e^{-iH_0 t} \end{aligned}}$$

Beispiel: $V(t) = V_0(t)\, x^4$

$V(t) = E(t) \cdot x$

z.B. $E(t) = E_0 \cos \Omega t$

Unitäre Äquivalenz von $|\psi(t)\rangle$ und

$\| \; |\psi(t)\rangle_I \equiv e^{iH_0 t} |\psi(t)\rangle \; /$

1. Ordnung Störungstheorie

$$d/dt\, |\psi(t)\rangle_I = -i V_I(t) |\psi(t)\rangle_I \qquad \Big/ \int_0^t dt'$$

$$\Rightarrow |\psi(t)\rangle_I = |\psi(t=0)\rangle_I - i \int_0^t dt'\, V_I(t') |\psi(t')\rangle_I$$

$$= e^{iH_0 t}|\Psi(t)\rangle \quad (t=0)$$

$$= \underbrace{|\Psi(t=0)\rangle_I}_{O(V^0)} \underbrace{\underbrace{- i\int_0^t dt' V_I(t')\{|\Psi(t=0)\rangle}_{O(V)} - i\int_0^{t'} dt'' V_I(t'')|\Psi(t'')\rangle\}}_{O(V^2)}$$

Jetzt diese Reihe abbrechen:

$$\boxed{|\Psi(t)\rangle_I = |\Psi(t=0)\rangle_I - i\int_0^t dt' V_I(t')|\Psi(t=0)\rangle_I + O(V^2)}$$

Jetzt Basis von $\mathcal{H}_0$ benutzen:

$$\mathcal{H}_0|n\rangle = \varepsilon_n|n\rangle \qquad \text{als gelöst betrachtet}$$

$$\hat{\mathbb{1}} = \sum_n |n\rangle\langle n| \qquad \text{Vollständigkeits}$$

$$\langle n|\Psi(t)\rangle_I = \langle n|\Psi(t=0)\rangle - i\int_0^t dt' \langle n|V_I(t')\sum_{n'}|n'\rangle\langle n'|\Psi(t=0)\rangle + O(V^2)$$

$$= \langle n|\Psi(0)\rangle - i\int_0^t dt' \sum_{n'} \langle n|V_I(t')|n'\rangle\langle n'|\Psi(0)\rangle + O(V^2)$$

Matrixgleichung der Form

$$\Psi_n = \Psi_n^0 + \sum_{n'} \vartheta_{nn'}(t)\,\Psi_{n'}^0 \; ; \quad \vartheta_{nn'}(t) \equiv -i\int_0^t dt'\langle n|V_I(t')|n'\rangle$$

Zur Zeit $t=0$ sei $|\Psi(t=0)\rangle = |m\rangle$ ein Eigenzustand von $\mathcal{H}_0$

Damit

$$\langle n|\Psi(t)\rangle_I = \langle n|m\rangle - i\int_0^t dt' \sum_{n'} \langle n|V_I(t')|n'\rangle \underbrace{\langle n'|m\rangle}_{\delta_{n'm}} + O(V^2)$$

$$= \delta_{nm} - i\int_0^t dt' \langle n|V_I(t')|m\rangle + O(V^2)$$

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iH_0 t}|\Psi(t)\rangle_I \qquad / \ \langle n|$$

$$\langle n|\Psi(t)\rangle = \langle n|e^{-iH_0 t}|\Psi(t)\rangle_I = e^{i\varepsilon_n t}\langle n|\Psi(t)\rangle_I$$

Schrödinger-Bild $\qquad\qquad$ WW Bild

$$|\langle n|\Psi(t)\rangle|^2 = |\langle n|\Psi(t)\rangle_I|^2 = \text{Wahrscheinlichkeit},$$

das System zur Zeit t im Zustand $|n\rangle$ zu finden.

Übergangswahrscheinlichkeit von m nach $n \neq m$ ist gegeben durch

$$|\langle n|\Psi(t)\rangle|^2 \overset{n\neq m}{=} \left|\int_0^t dt' \langle n|V_I(t')|m\rangle\right|^2$$

in erster Ordnung in V

Plötzliches Einschalten „sudden switching"

$$V(t) = V\,\theta(t), \qquad \theta(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

In 1. Ordnung

$$|\langle n|\Psi(t)\rangle|^2 \equiv P_{m\to n}(t) = \left|\int_0^t dt' \langle n|V_I(t')|m\rangle\right|^2$$

Jetzt $\langle n|V_I(t')|m\rangle = \langle n|e^{iH_0t'}Ve^{-iH_0t'}|m\rangle$

$$= e^{i(\varepsilon_n-\varepsilon_m)t'}\langle n|V|m\rangle$$

$$\Rightarrow P_{m\to n}(t) = \left|\int_0^t dt' \langle n|V|m\rangle e^{i(\varepsilon_n-\varepsilon_m)t'}\right|^2 =$$

$$= |\langle n|V|m\rangle|^2 \left|\frac{e^{i(\varepsilon_n-\varepsilon_m)t}-1}{i(\varepsilon_n-\varepsilon_m)}\right|^2$$

$$= |\langle n|V|m\rangle|^2\, 4\,\frac{\sin^2\frac{\varepsilon_n-\varepsilon_m}{2}t}{(\varepsilon_n-\varepsilon_m)^2}\ ; \qquad \left(\frac{\sin xt}{x}\right)^2$$

Jetzt $t \to \infty$

⌈ Theorem (Forster, Analysis III):

Für jede integrable, normierte Funktion $\delta(x)$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x) = 1$ gilt

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \delta(x)$$

$\lrcorner$

Jetzt mit $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin^2 x}{x^2}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{\pi}\frac{\sin^2 x/\varepsilon}{(x/\varepsilon)^2} = \delta(x) \; ; \qquad \Delta E \equiv \varepsilon_n - \varepsilon_m$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{2\pi} \frac{\sin^2 \frac{\Delta E \cdot t}{2}}{(\Delta E \cdot t/2)^2} = \delta(\Delta E)$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} P_{m\to n}(t) = \lim_{t\to\infty} |\langle n|V|m\rangle|^2 \, 2\pi \frac{t}{2\pi} \frac{\sin^2 \frac{\varepsilon_n-\varepsilon_m}{2} t}{\left[\frac{(\varepsilon_n-\varepsilon_m)}{2} t\right]^2}$$

$$= 2\pi |\langle n|V|m\rangle|^2 \, \delta(\varepsilon_n - \varepsilon_m)$$

Definiere

$$\boxed{\Gamma_{m\to n} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} P_{m\to n}(t) \quad \text{Übergangsrate} \\ = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n|V|m\rangle|^2 \, \delta(\varepsilon_n - \varepsilon_m)}$$

„Fermis Goldene Regel"

Gesamt-Übergangsrate $\Gamma_m \equiv \sum_{n\neq m} \Gamma_{m\to n} \Rightarrow$

$$\Gamma_m = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{n\neq m} |\langle n|V|m\rangle|^2 \, \delta(\varepsilon_n - \varepsilon_m)$$

Höhere Ordnungen

Zeitentwicklungsoperator $|\Psi(t)\rangle = \mathcal{U}(t,t_0)|\Psi(t_0)\rangle$

Falls $\mathcal{H}(t) = \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{U}(t,t_0) = e^{-i H(t-t_0)}$

Erfüllt Bewegungsgl.: $i\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}(t,t_0) = \mathcal{H}(t)\mathcal{U}(t,t_0)$

$$\mathcal{U}(t_0,t_0) = \mathbb{1}$$

Jetzt $\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_0 + V(t)$

Jetzt WW-Bild: $\tilde{\mathcal{U}}(t,t_0) \equiv e^{iH_0 t}\mathcal{U}(t,t_0)e^{-iH_0 t}$

$$\Rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathcal{U}}(t,t_0) = \tilde{V}(t)\tilde{\mathcal{U}}(t,t_0)$$

$$\tilde{V}(t) = e^{iH_0 t}V(t)e^{-iH_0 t}$$

Jetzt iterieren:

$t' = t_1$

$$\tilde{\mathcal{U}}(t,t_0) = \mathbb{1} - i\int_{t_0}^{t} dt'\,\tilde{V}(t')\tilde{\mathcal{U}}(t',t_0)$$

$$= \mathbb{1} - i\int_{t_0}^{t} dt_1\,\tilde{V}(t_1) + (-i)^2\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t_1} dt_2\,\tilde{V}(t_1)\tilde{V}(t_2) + \dots$$

$$= \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n\,\tilde{V}(t_1)\dots\tilde{V}(t_n)$$

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = 1 + x(1 + x + x^2 + \dots)$$

$$= 1 + xS$$