

Mittelwerte (Erwartungswert) einer Zufallsvariablen X

$$\langle X \rangle := \int d^d x \rho(x) x$$

bel. Funktionen $\varphi(x)$

$$\langle \varphi \rangle = \int d^d x \rho(x) \varphi(x)$$

geeignete Funktionen
↙

NB: Der Mittelwert ist ein lineares Funktional $f: L \rightarrow \mathbb{R}$
 $\varphi \rightarrow \langle \varphi \rangle$

$$\text{Es gilt } \langle c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 \rangle = c_1 \langle \varphi_1 \rangle + c_2 \langle \varphi_2 \rangle$$

Unkorrelierte Zufallsvariablen:

x_1, x_2 heißen unkorreliert, falls $\rho(x_1, x_2) = \rho_1(x_1) \rho_2(x_2)$

$$\text{Dann gilt } \langle x_1 x_2 \rangle = \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle$$

$$\text{Beweis: } \int dx_1 dx_2 \rho(x_1, x_2) x_1 x_2 = \int dx_1 \rho_1(x_1) x_1 \int dx_2 \rho_2(x_2) x_2$$

Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeitsverteilung und Mittelwerten:

v -tes Moment der Wahrscheinlichkeitsverf.: $M_v := \langle x^v \rangle$

$$\text{Momentenerzeugende: } Z(\alpha) = \langle e^{\alpha x} \rangle = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\alpha^v}{v!} M_v$$

$$\frac{\partial^v}{\partial \alpha^v} Z(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = M_v$$

Durch die Angabe aller Momente ist die Wahrsch. verteilung festgelegt!

Verallgemeinerung auf d Zufallsvariable:

$$M_{v_1, v_2, \dots, v_d} = \langle x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots x_d^{v_d} \rangle$$

Moment der Ordnung
 $v := v_1 + v_2 + \dots + v_d$

Momentenerzeugende: $Z(\alpha) = \langle e^{\alpha x} \rangle$

$$= \sum_{v_1, \dots, v_d} \frac{\alpha_1^{v_1} \dots \alpha_d^{v_d}}{v_1! \dots v_d!} M_{v_1, \dots, v_d}$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$
 $x = (x_1, \dots, x_d)$

Kumulante $C_{v_1, \dots, v_d} = \langle x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots x_d^{v_d} \rangle_c$

ist definiert durch die

kumulanten erzeugende $\Gamma(\alpha) = \ln \langle e^{\alpha x} \rangle$

$$\left(\frac{\partial^{v_1} \dots \partial^{v_d}}{\partial x_1^{v_1} \dots \partial x_d^{v_d}} \Gamma(\alpha) \right) \Big|_{\alpha=0} = C_{v_1, \dots, v_d}$$

$$\Gamma(\alpha) = \sum_{v_1, \dots, v_d} \frac{\alpha_1^{v_1} \dots \alpha_d^{v_d}}{v_1! \dots v_d!} C_{v_1, \dots, v_d}$$

Eigenschaft:

- Kumulanten sind additiv für unkorrelierte Zufallsvariable, (gilt nicht für Momente!!)

Beweis: Seien x_1, x_2 unkorreliert $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$

$$\underline{x} = (x_1, x_2)$$

$$\Rightarrow Z(\underline{\alpha}) = \langle e^{\underline{\alpha} \cdot \underline{x}} \rangle = \int dx_1 dx_2 f(x_1) f(x_2) e^{\alpha_1 x_1} e^{\alpha_2 x_2}$$
$$= \langle e^{\alpha_1 x_1} \rangle \langle e^{\alpha_2 x_2} \rangle$$

$$\Rightarrow \Gamma(\underline{\alpha}) = \ln Z(\underline{\alpha}) = \underbrace{\ln \langle e^{\alpha_1 x_1} \rangle}_{\Gamma(\alpha_1)} + \underbrace{\ln \langle e^{\alpha_2 x_2} \rangle}_{\Gamma(\alpha_2)}$$

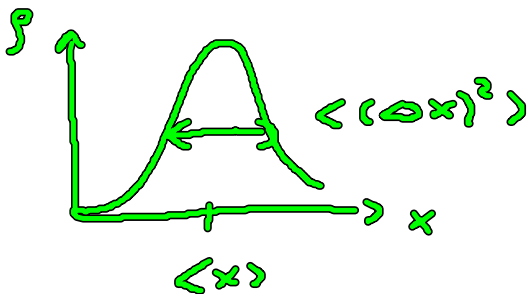
$$\Rightarrow \langle (x_1 + x_2)^{\nu} \rangle_c = \langle x_1^{\nu} \rangle_c + \langle x_2^{\nu} \rangle_c$$

Fluktuation $\Delta x := x - \langle x \rangle$

Es gilt: $\langle \Delta x \rangle = 0$

Varianz: $\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle \langle x \rangle + \langle x \rangle^2$

$$= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$



(Maß für die Breite einer Verteilung)

Ⓢ Zusammenhang zwischen Kennwerten und Momenten:

$$\langle x \rangle_c = \langle x \rangle$$

$$\langle x^2 \rangle_c = \langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$\langle x^3 \rangle_c = \langle (\Delta x)^3 \rangle$$

$$\langle x^4 \rangle_c = \langle (\Delta x)^4 \rangle - 3 (\langle (\Delta x)^2 \rangle)^2$$

Gaußverteilung (Normalverteilung):

$$g(x) = A \exp\left(-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\sigma^2 := \langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle_c$$

σ Standardabweichung

Normierung: $\int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) = A \sigma \sqrt{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} du e^{-u^2}}_{\sqrt{\pi}} = 1$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$$

$$u = \frac{x}{\sigma \sqrt{2}}$$

Gaußverteilung $g(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}}$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) x dx = x_0$$

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) (x - x_0)^2 = \sigma^2$$

$$Z(\alpha) = \langle e^{\alpha x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) e^{\alpha x}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2} + \alpha x}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{\frac{-x^2 - 2x(x_0 + \sigma^2\alpha) + (x_0 + \sigma^2\alpha)^2}{2\sigma^2}} \dots$$

$$\dots \underline{-2x_0\sigma^2\alpha}$$

$$Z(\alpha) = e^{x_0\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2}$$

$$\langle x \rangle = \frac{\partial Z}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = (x_0 + \sigma^2\alpha) e^{x_0\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2} \Big|_{\alpha=0} = x_0$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\partial^2 Z}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha=0} = \left[\sigma^2 + (x_0 + \sigma^2\alpha)^2 \right] e^{x_0\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2} \Big|_{\alpha=0} = \sigma^2 + x_0^2$$

$$\Gamma(\alpha) = \ln Z(\alpha) = x_0\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2$$

$$\langle x \rangle_c = \frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha} \Big|_0 = x_0$$

$$\langle x^2 \rangle_c = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \alpha^2} \Big|_0 = \sigma^2$$

$$\langle x^v \rangle_c = 0 \quad \text{für } v > 2$$

1.2 Informationsmaße

Die Informationstheorie (Shannon, Wiener) entstand ¹⁹¹⁶⁻²⁰⁰¹ ¹⁸⁹⁴⁻¹⁹⁶⁴ im 2. Weltkrieg in Zusammenhang mit Entschlüsselung codierter Nachrichten

Def.: Ein Maß μ auf einer σ -Algebra \mathcal{A} ist eine

Abb.: $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ mit den Eigenschaften

$$\mu(\emptyset) = 0$$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad \text{für disjunkte Ereignisse } A_i \\ \text{(d.h. } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j)$$

(NB: Eine σ -Algebra ist eine Algebra \mathcal{A} mit Eigenschaft
abzählbar viele $A_i \in \mathcal{A}$ ($i=1, \dots, \infty$) $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$)

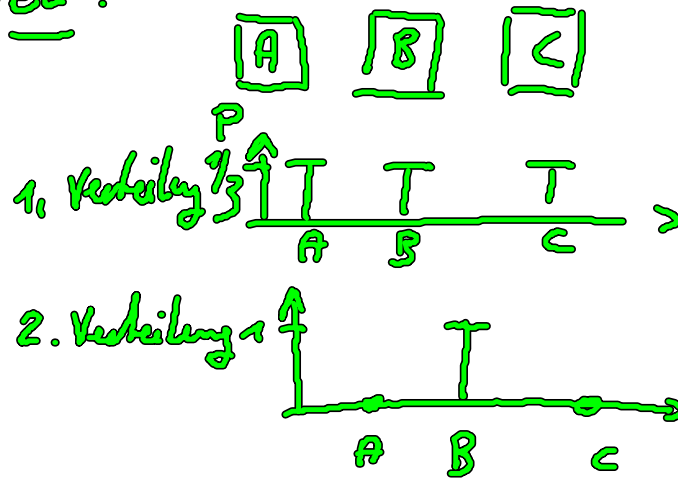
Im folgenden sei die Ereignisalgebra stets eine σ -Algebra

Beispiel eines Maßes: Wahrscheinlichkeit P

Idee des Informationsmaßes: Vergleich verschiedener Wahsch. Verteilungen
über einer Ereignisalgebra \mathcal{A}

Frage: Welche von 2 Verteilungen enthält
mehr Information (Kenntnis) darüber,
welches Ereignis eintreten wird?

Beispiel :



$\in \mathcal{A}$

Gleichverteilung
(minimale Kenntnis)

schiefe Verteilung
(maximale Kenntnis)
= Sicherheit

Bitzahl

Ausgangspunkt: diskrete Ereignisalgebra $\mathcal{A} = \{A_i\}$

Frage: Wie lang muss eine Nachricht sein, die einem Beobachter mitteilt, dass ein Ereignis eingetreten ist?

Länge der Nachricht = Maß für die fehlende Kenntnis eines Beobachters

Beispiel: Auswahl eines Ereignisses aus $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ falls Beobachter keine Vorannahme hat.

(i) $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$: einfache Alternative

= kleinste Informationseinheit

= 1 bit (binary digit) 1942

Nachricht: 0 oder 1

(ii) \mathcal{A} = Menge mit $N = 2^n$ Elemente

n Alternativentscheidungen

Nachricht z.B.: 0011

n Stellen in Binärdarstellung

Länge der Nachricht : $n = \log_2 N$ (Bitzahl)