

## Fortsetzung Entartetes Fermigas

$$F_s(\eta) := \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^\infty dy \frac{y^s}{e^{y-\eta} + 1} \quad (s > 0) \quad \eta = \frac{\mu}{kT}$$

$$\eta \gg 1 \rightarrow F_s(\eta) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \left[ \frac{\eta^{s+1}}{s+1} + \frac{\pi^2}{6} \eta^{s-1} + \mathcal{O}(\eta^{s-3}) \right]$$

Speziell:

$$F_{1/2}(\eta) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\eta^{3/2}}{3/2} + \frac{\pi^2}{12} \eta^{-1/2} \right] \quad F_{3/2}(\eta) \approx \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\eta^{5/2}}{5/2} + \frac{\pi^2}{4} \eta^{1/2} \right]$$

$$\bar{N} = \frac{4\pi V}{h^3} \frac{2s+1}{2} (2m kT)^{3/2} \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{\mu}{kT} \right)^{3/2} + \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{\mu}{kT} \right)^{-1/2} \right]$$

$$= \frac{2}{3} \frac{4\pi V}{h^3} \frac{2s+1}{2} (2m\mu)^{3/2} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} \left( \frac{kT}{\mu} \right)^2 \right] \quad (1)$$

Def.: Fermi-Energie  $E_F := \mu(T=0, \bar{N}, V)$

(Zustände  $E < E_F$  besetzt,  $E > E_F$  unbesetzt bei  $T=0$ )

Elimination von  $\mu$  durch  $E_F$  und  $\bar{N}$ !

$$T \rightarrow 0 \quad \bar{N} = \frac{2}{3} \frac{4\pi V}{h^3} \frac{2s+1}{2} (2m E_F)^{3/2} \quad (2)$$

$T > 0$ : Entwicklung in niedrigster Ordnung in  $\frac{kT}{E_F}$

$$\bar{N} \text{ eingesetzt in (1)} : E_F^{3/2} = \mu^{3/2} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} \left( \frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]$$

$$\rightarrow \mu \approx E_F \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} \left( \frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]^{-2/3} \approx E_F \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{E_F} \right)^2 \right] \quad (3)$$

innere Energie

$$U = \frac{4\pi V}{h^3} \frac{2s+1}{2} (2m)^{3/2} (kT)^{3/2} \left[ \frac{2}{5} \left( \frac{\mu}{kT} \right)^{5/2} + \frac{\pi^2}{4} \left( \frac{\mu}{kT} \right)^{1/2} \right]$$

$$= \frac{2}{5} \frac{4\pi V}{h^3} \frac{2s+1}{2} (2m)^{3/2} \mu^{5/2} \left[ 1 + \frac{3\pi^2}{8} \left( \frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]$$

$$(3) \approx \underbrace{\frac{2}{5} \frac{4\pi V}{h^3} \frac{2s+1}{2} (2m)^{3/2} E_F^{5/2}}_{\frac{3}{5} \bar{N} E_F} \underbrace{\left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{E_F} \right)^2 \right]^{5/2}}_{\approx 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{E_F} \right)^2} \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{8} \left( \frac{kT}{E_F} \right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow U = \frac{3}{5} \bar{N} E_F \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{E_F} \right)^2 \right] \quad \text{kalor. Zustandsgleichung}$$

$$pV = \frac{2}{3} U = \frac{2}{5} \bar{N} E_F \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{E_F} \right)^2 \right] \quad \text{therm. Zustandsgl.}$$

Druck des Fermigas ist um einen Faktor  $\sim \frac{E_F}{kT}$  größer als in klassischen idealen Gasen (z.B.:  $E_F \approx 1 \text{ eV} \approx T \cdot 10^4 \text{ K}$ )

Grund: Pauli-Prinzip (effektive Abstoßung der Teilchen)

Spezifische Wärme

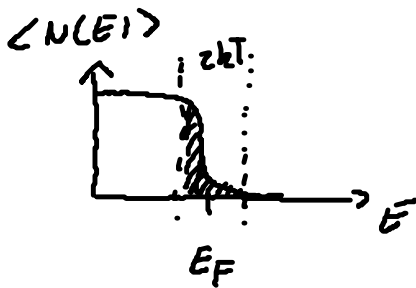
$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{\pi^2}{2} \bar{N} k \frac{kT}{E_F} \quad \text{Wärmekapazität}$$

$$C_V = \frac{\pi^2}{2} R \frac{kT}{E_F} \sim T \quad \text{um Faktor } \frac{kT}{E_F} \quad \text{kleiner als im klass. idealen Gases}$$

$$\text{bei } T \approx 300 \text{ K} \quad \frac{kT}{E_F} \sim \frac{1}{40} \quad \left( C_V = \frac{3}{2} R \right)$$

Grund: Nur die Teilchen in der "Aufweichungszone"  
 $E_F - kT < E < E_F + kT$  der Fermi-Verteilung tragen  
 zur spezifischen Wärme bei, da nur sie in freie Zustände  
 thermisch angeregt werden können:

Zahl  $\Delta N \sim \bar{N} \frac{kT}{E_F}$ , jedes hat Energie  $\sim kT$   
 $\Delta U \sim \bar{U} \frac{(kT)^2}{E_F} \rightarrow c_v \sim \bar{U} k \frac{kT}{E_F}$



### Beispiele für entartete Fermigasen

- Elektronen in Metallen
- Elektronen in Halbleitern nur bei tiefen Temperaturen oder hoher Dotierung

### Nichtentartete Fermigasen

(verdünntes, nichtrelativistisches Quantengas,  
 z.B. Elektronen in Halbleitern im Normalbereich)

Voraussetzung:  $\xi = e^{\mu/kT} \ll 1$  d.h.  $\mu < 0$   $\eta = \frac{\mu}{kT} < 0$

Entwicklung der Fermi-Dirac-Integrale nach Potenzen von  $\xi$ :

$$F_s(\eta) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^\infty dy \frac{y^s}{e^{y-\eta} + 1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^\infty dy \frac{y e^{-y}}{1 + y e^{-y}} y^s \\
&\approx \frac{1}{\Gamma(s+1)} \left[ \underbrace{y \int_0^\infty dy y^s e^{-y}}_{\Gamma(s+1)} - \underbrace{y^2 \int_0^\infty dy y^s e^{-2y}}_{2^{\frac{1}{s+1}} \int_0^\infty dz z^s e^{-z}} + \dots \right] \\
&\qquad\qquad\qquad \Gamma(s+1)
\end{aligned}$$

$$= e^{\frac{\mu}{kT}} \left[ 1 - \frac{1}{2^{s+1}} e^{\frac{\mu}{kT}} \right]$$

↑  
Boltzmann-  
limit

↑  
Quantenkorrektur

$$\bar{N} = \frac{4\pi V}{h^3} \frac{2s+1}{2} (2mkT)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} F_{1/2}(\eta) = V N_c F_{1/2}\left(\frac{\mu}{kT}\right)$$

mit Entartungskonzentration  $N_c := (2s+1) \left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}$

$$\approx V N_c e^{\frac{\mu}{kT}} \left[ 1 - \frac{1}{2^{3/2}} e^{\frac{\mu}{kT}} \right]$$


Vollständige Nichtentartung:  $\frac{\bar{N}}{V} = N_c e^{\frac{\mu}{kT}} (\ll N_c)$   
 $\ll 1$

$$U = \frac{4\pi V}{h^3} \frac{2s+1}{2} (2mkT)^{3/2} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} kT F_{3/2}\left(\frac{\mu}{kT}\right)$$

$$\approx \frac{3}{2} kT V N_c e^{\mu/kT} \left[ 1 - \frac{1}{2^{5/2}} e^{\mu/kT} \right]$$

Elimination von  $\mu$  durch  $\bar{N}$  ;

$$\bar{N} = V N_c \gamma \left[ 1 - 2^{-3/2} \gamma \right]$$

0. Näherung:  $\bar{N} = V N_c \gamma$  

1. Näherung:  $\bar{N} = V N_c \gamma \left[ 1 - 2^{-3/2} \frac{\bar{N}}{V N_c} \right]$

$$\rightarrow \gamma = e^{\mu/kT} \approx \frac{\bar{N}}{V N_c} \left[ 1 + 2^{-3/2} \frac{\bar{N}}{V N_c} \right]$$

$$\Rightarrow U \approx \frac{3}{2} kT \bar{N} \left[ 1 + \frac{1}{2^{3/2}} \frac{\bar{N}}{V N_c} \right] \left[ 1 - \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\bar{N}}{V N_c} \right]$$

$$U \approx \frac{3}{2} kT \bar{N} \left[ 1 + \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\bar{N}}{V N_c(T)} \right]$$

kalorische Zustandsgl.

↑ Quantenkorrektur  $O\left(\frac{\bar{N}/V}{N_c(T)}\right)$

$$pV = \frac{2}{3} U = kT \bar{N} \left[ 1 + \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\bar{N}}{V N_c(T)} \right]$$

thermische Zustandsgl.

$$pV = RT \left( 1 + \frac{1}{2^{5/2}} \frac{N_A}{V N_c(T)} \right)$$

klass. ideales  
gas

Fermi - Abstoßung  
(erhöhter Druck)

NB: Mit der thermischen Wellenlänge  
 ( $\lambda$  die Broglie-Wellenlänge Ersetzt)  
 schreibt man

$$\lambda := \left( \frac{h^2}{2\pi m k T} \right)^{1/2}$$

$$N_c = \frac{2s+1}{\lambda^3}$$

### 5.3. Das ideale Bosegas

analog wie Fermigas, nur Besetzungszahlen  $N_j = 0, 1, 2, \dots$

Großkanonische Zustandssumme:

$$\Xi = \sum_{N_1, \dots, N_s} \exp -\beta \sum_j (E_j - \mu) N_j$$

$$t_j = \exp^{\beta(\mu - E_j)}$$

$$\text{Bosonen} = \prod_j \left[ \sum_{N_j=0}^{\infty} t_j^{N_j} \right]$$

$$= \prod_j \underbrace{\frac{1}{1 - t_j}}_{\Xi_j}$$

geometrische Reihe konvergiert  
 genau dann, wenn  $t_j < 1$   
 also  $E_j > \mu$

Wahrscheinlichkeit, die Besetzungszahlen  $N_1, N_2, \dots$  der  $1$  Teilchen-  
 Zustände  $E_1, E_2, \dots$  zu finden:

$$P(N_1, N_2, \dots) = \Xi^{-1} \exp \left\{ -\beta \sum_j (E_j - \mu) N_j \right\}$$

$$= \prod_j \underbrace{(1 - t_j) t_j^{N_j}}_{p(N_j)} \quad \text{separiert!}$$

also  $p(N_j) = (1 - \exp \beta(\mu - E_j)) \exp \{ \beta(\mu - E_j) N_j \}$

Mittlere Besetzungszahl im Zustand  $E_j$ :

$$\begin{aligned} \langle N_j \rangle &= \frac{\partial \psi_j}{\partial \alpha} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \Xi_j = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln(1 - t_j) \\ &= \frac{t_j}{1 - t_j} = \frac{1}{t_j^{-1} - 1} \end{aligned}$$

$$\langle N_j \rangle = \frac{1}{\exp \left[ \frac{E_j - \mu}{kT} \right] - 1}$$

Bose-Verteilung