Fortsetzung Entartetes Fermigas

$$F_s(\eta) := \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^\infty dy \frac{y^s}{e^{y-\eta}+1} \qquad (s>0) \qquad \eta = \frac{\mu}{kT}$$

$$\eta \gg 1 \longrightarrow F_s(\eta) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \left[\frac{\eta^{s+1}}{s+1} + s\frac{\pi^2}{6}\eta^{s-1} + \mathcal{O}(\eta^{s-3}) \right]$$

speziell:

$$F_{1/2}(\eta) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\eta^{3/2}}{3/2} + \frac{\pi^2}{12}\eta^{-1/2} \right] \qquad F_{3/2}(\eta) \approx \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left[\frac{\eta^{5/2}}{5/2} + \frac{\pi^2}{4}\eta^{1/2} \right]$$

$$\bar{N} = \frac{4\pi V}{h^3} \frac{2s+1}{2} (2mkT)^{3/2} \left[\frac{2}{3}\left(\frac{\mu}{kT}\right)^{3/2} + \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{\mu}{kT}\right)^{-1/2} \right]$$

$$= \frac{2}{3} \frac{4\pi V}{h^3} \frac{2s+1}{2} (2m\mu)^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2 \right] \qquad (1)$$

Def.: Fermi-Energie $\quad E_F := \mu(T=0, \bar{N}, V)$

(Zustände $E < E_F$ besetzt, $E > E_F$ unbesetzt bei $T=0$

Elimination von μ durch E_F und $\bar{N}$!

$$T \to 0 \quad \bar{N} = \frac{2}{3} \frac{4\pi V}{h^3} \frac{2s+1}{2} (2m E_F)^{3/2} \qquad (2)$$

$T > 0$: Entwicklung in niedrigster Ordnung in $\frac{kT}{E_F}$

$\bar{N}$ eingesetzt in (1) : $\quad E_F^{3/2} = \mu^{3/2}\left[1 + \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right]$

$$\longrightarrow \mu \approx E_F\left[1 + \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right]^{-2/3} \approx E_F\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{E_F}\right)^2\right] \qquad (3)$$

Innere Energie

$$U = \frac{4\pi V}{h^3} \frac{2s+1}{2} (2m)^{3/2} (kT)^{3/2} \left[\frac{2}{5}\left(\frac{\mu}{kT}\right)^{5/2} + \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\mu}{kT}\right)^{1/2} \right]$$

$$\approx \frac{2}{5}\frac{4\pi V}{h^3}\frac{2s+1}{2}(2m)^{3/2}\mu^{5/2}\left[1+\frac{5\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right]$$

$$\overset{(3)}{\approx} \underbrace{\frac{2}{5}\frac{4\pi V}{h^3}\frac{2s+1}{2}(2m)^{3/2}E_F^{5/2}}_{\frac{3}{5}\bar{N}E_F}\underbrace{\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{E_F}\right)^2\right]^{5/2}\left[1+\frac{5\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{E_F}\right)^2\right]}_{\approx 1+\frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{E_F}\right)^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\Rightarrow U = \frac{3}{5}\bar{N}E_F\left[1+\frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{E_F}\right)^2\right] && \text{kalor. Zustandsgleichung} \\ &pV = \frac{2}{3}U = \frac{2}{5}\bar{N}E_F\left[1+\frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{E_F}\right)^2\right] && \text{therm. Zustandsgl.}\end{aligned}}$$

Druck des Fermigases ist um einen Faktor $\sim \frac{\bar{E}_F}{kT}$ größer als in klassischen idealen Gasen (z.B.: $E_F \approx 1\,eV \mathrel{\hat{=}} T\ 10^4\,K$)

Grund: <u>Pauli-Prinzip</u> (effektive Abstoßung der Teilchen)

<u>spezifische Wärme</u>

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{\pi^2}{2}\bar{N}k\frac{kT}{E_F} \qquad \text{Wärmekapazität}$$

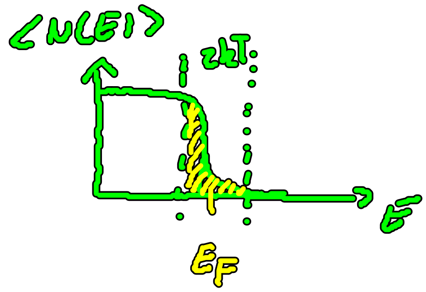
$$c_V = \frac{\pi^2}{2}R\frac{kT}{E_F} \sim T$$ um Faktor $\frac{kT}{E_F}$ kleiner als im klass. idealen Gases

bei $T \approx 300K$ $\quad \frac{kT}{E_F} \sim \frac{1}{40}$ $\quad \left(c_V = \frac{3}{2}R\right)$

Grund: Nur die Teilchen in der „Aufweichungszone"
$E_F - kT < E < E_F + kT$ der Fermi-Verteilung tragen
zur spezifischen Wärme bei, da nur sie in freie Zustände
thermisch angeregt werden können:

Zahl $\Delta N \sim \bar{N} \frac{kT}{E_F}$, jedes hat Energie $\sim kT$

$$\Delta U \sim \bar{N} \frac{(kT)^2}{E_F} \longrightarrow c_V \sim \bar{N} k \frac{kT}{E_F}$$



Beispiele für entartete Fermigase

- Elektronen in Metallen
- Elektronen in Halbleitern nur bei tiefen Temperaturen oder hoher Dotierung

Nichtentartete Fermigas
(verdünntes, nichtrelativistisches Quantengas,
z.B. Elektronen in Halbleitern im Normalbereich)

Vorraussetzung: $\zeta = e^{\mu/kT} \ll 1$ d.h. $\mu < 0$ $\eta = \frac{\mu}{kT} < 0$

Entwicklung der Fermi-Dirac-Integrale nach Potenzen von ζ:

$$F_s(\eta) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^\infty dy \, \frac{y^s}{e^{y-\eta}+1}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^\infty dy\, \frac{\zeta e^{-y}}{1+\zeta e^{-y}}\, y^s$$

$$\approx \frac{1}{\Gamma(s+1)} \Big[\zeta \underbrace{\int_0^\infty dy\, y^s e^{-y}}_{\Gamma(s+1)} - \zeta^2 \underbrace{\int_0^\infty dy\, y^s e^{-2y}}_{\frac{1}{2^{s+1}} \underbrace{\int_0^\infty dz\, z^s e^{-z}}_{\Gamma(s+1)}} + \dots$$

$$= e^{\frac{\mu}{kT}} \left[1 - \frac{1}{2^{s+1}}\, e^{\frac{\mu}{kT}} \right]$$

Boltzmann limit

Quantenkorrektur

$$\bar{N} = \frac{4\pi V}{h^3}\, \frac{2s+1}{2}\, (2mkT)^{3/2}\, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, F_{1/2}(\eta) = V N_c\, F_{1/2}\left(\frac{\mu}{kT}\right)$$

mit Entartungskonzentration $N_c := (2s+1)\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}$

$$\approx V N_c\, e^{\frac{\mu}{kT}} \left[1 - \frac{1}{2^{3/2}}\, e^{\mu/kT} \right]$$

Vollständige Nichtentartung: $\frac{\bar{N}}{V} = N_c \underbrace{e^{\mu/kT}}_{\ll 1} \quad (\ll N_c)$

$$U = \frac{4\pi V}{h^3}\, \frac{2s+1}{2}\, (2mkT)^{3/2}\, \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\, kT\, F_{3/2}\left(\frac{\mu}{kT}\right)$$

$$\approx \frac{3}{2} kT V N_c e^{\mu/kT} \left[1 - \frac{1}{2^{5/2}} e^{\mu/kT} \right]$$

Elimination von μ durch $\bar{N}$;

$$\bar{N} = V N_c \zeta \left[1 - 2^{-3/2} \zeta \right]$$

0. Näherung: $\bar{N} = V N_c \zeta$

1. Näherung: $\bar{N} = V N_c \zeta \left[1 - 2^{-3/2} \frac{\bar{N}}{V N_c} \right]$

$$\longrightarrow \boxed{\zeta = e^{\mu/kT} \approx \frac{\bar{N}}{V N_c} \left[1 + 2^{-3/2} \frac{\bar{N}}{V N_c} \right]}$$

$$\Rightarrow U \approx \frac{3}{2} kT \bar{N} \left[1 + \frac{1}{2^{3/2}} \frac{\bar{N}}{V N_c} \right] \left[1 - \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\bar{N}}{V N_c} \right]$$

$$\boxed{U \approx \frac{3}{2} kT \bar{N} \left[1 + \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\bar{N}}{V N_c(T)} \right]}$$ kalorische Zustandsgl.

Quantenkorrektur $O\left(\frac{\bar{N}/V}{N_c(T)} \right)$

$$\boxed{pV = \frac{2}{3} U = kT \bar{N} \left[1 + \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\bar{N}}{V N_c(T)} \right]}$$ thermische Zustandsgl.

$$pv = \underbrace{RT}_{\text{klass. ideales Gas}} \left(1 + \underbrace{\frac{1}{2^{5/2}} \frac{N_A}{v N_c(T)}}_{\text{Fermi-Abstoßung (erhöhter Druck)}} \right)$$

NB: Mit der thermischen Wellenlänge $\lambda := \left(\frac{h^2}{2\pi m k T}\right)^{1/2}$

(≈ de Broglie-Wellenlänge $E \approx kT$)

schreibt man $n_c = \frac{2s+1}{\lambda^3}$

5.3. Das ideale Bosegas

analog wie Fermigas, nur Besetzungszahlen $N_j = 0, 1, 2 \ldots$

Großkanonische Zustandssumme:

$$\Xi = \sum_{N_1 \ldots N_2} \exp^{-\beta \sum_j (E_j - \mu) N_j}$$

$$t_j = \exp^{\beta(\mu - E_j)}$$

$$\stackrel{\text{Bosonen}}{=} \prod_j \left[\sum_{N_j=0}^{\infty} t_j^{N_j} \right]$$

$$= \prod_j \underbrace{\frac{1}{1 - t_j}}_{\Xi_j}$$

geometrische Reihe konvergiert genau dann, wenn $t_j < 1$ also $E_j > \mu$

Wahrscheinlichkeit, die Besetzungszahlen $N_1 \ldots N_2 \ldots$ der 1 Teilchen-Zustände $E_1, E_2 \ldots$ zu finden:

$$P(N_1, N_2, \ldots) = \Xi^{-1} \exp\left\{-\beta \sum_j (E_j - \mu) N_j\right\}$$

$$= \prod_j \underbrace{(1-t_j)\, t_j^{N_j}}_{p(N_j)} \qquad \text{separiert!}$$

also $p(N_j) = (1 - \exp\beta(\mu - E_j))\, \exp\{\beta(\mu - E_j) N_j\}$

Mittlere Besetzungszahl im Zustand E_j:

$$\langle N_j \rangle = \frac{\partial \psi_j}{\partial \alpha} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial \mu} \ln \Xi_j = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial \mu} \ln(1 - t_j)$$

$$= \frac{t_j}{1-t_j} = \frac{1}{t_j^{-1} - 1}$$

$$\boxed{\langle N_j \rangle = \frac{1}{\exp\left[\frac{E_j - \mu}{kT}\right] - 1}}$$

Bose-Verteilung