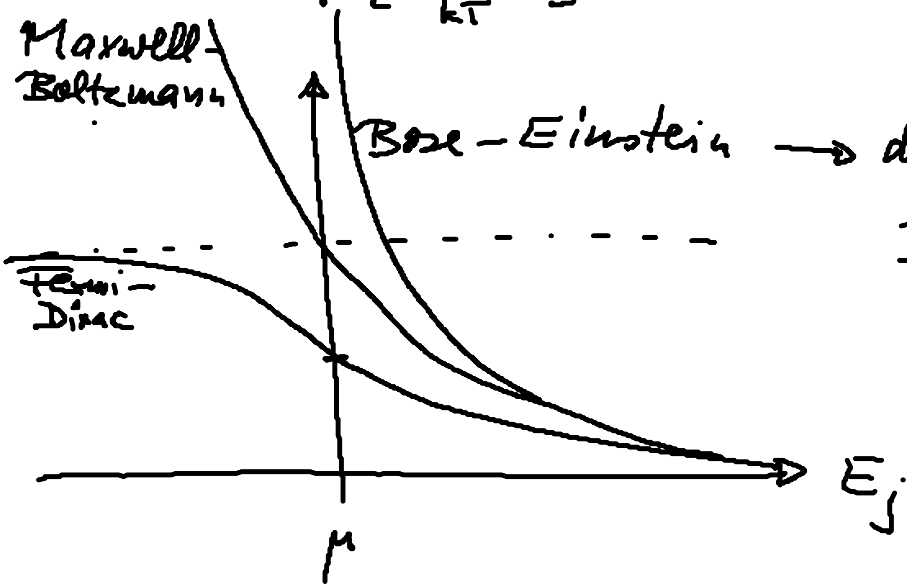
$$\langle N_j \rangle = \frac{1}{\exp\left[\frac{E_j - \mu}{kT}\right] - \varepsilon} \quad \text{mit } \varepsilon = \begin{cases} -1 & \text{Fermi-Dirac} \\ 0 & \text{Maxwell-Boltzmann} \\ +1 & \text{Bose-Einstein} \end{cases}$$



Bose-Einstein $\rightarrow$ divergiert für $E_j \rightarrow \mu$

$$\Xi_j = \frac{1}{1 - t_j}$$

$$t_j = e^{\beta(\mu - E_j)}$$

<u>Übergang zum Quasikontinuum der Zustände</u> $E = \frac{p^2}{2m}$

$$\ln \Xi = \sum_j \ln \Xi_j = -\sum_j \ln\left(1 - \zeta e^{-\beta E_j}\right) \quad (\zeta = e^{\beta\mu} \text{ Fugazität})$$

$$= -(2S+1)\frac{4\pi V}{h^3}\int dp\, p^2 \ln\left[1 - \zeta e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}\right]$$

$\vdots$

$$\overset{\text{part. Int.}}{=} -(2S+1)\frac{4\pi V}{h^3}\left\{\underbrace{\left[\frac{p^3}{3}\ln\left(1 - \zeta e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}\right)\right]_0^\infty}_{0} - \int_0^\infty dp\, \frac{p^3}{3}\,\frac{\frac{\beta p}{m}\zeta e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}}{1 - \zeta e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}}\right\}$$

$u \quad v \qquad\qquad u \quad v'$

$$= \frac{2}{3}\beta(2S+1)\frac{4\pi V}{h^3}\int_0^\infty dp\, p^2\, \frac{\frac{p^2}{2m}}{\frac{1}{\zeta}\exp\left\{\frac{\beta p^2}{2m}\right\} - 1}$$

$$= \frac{2}{3}\beta(2S+1)\frac{V}{h^3}\int_0^\infty dp\, 4\pi p^2 \langle N(p)\rangle E(p)$$

$$= \frac{2}{3}\beta\, U$$

$$\Rightarrow \boxed{pV = kT \ln \Xi = \frac{2}{3} U} \quad \text{wie für Fermigas}$$

Verdünntes Bosegas (quasiklass., nichtentartetes Grenzfall)

Entw. nach Potenzen von $\boxed{\zeta = e^{\mu/kT} \ll 1}$

$\mu < 0$

$$\bar{N} = \sum_j \langle N_j \rangle \approx (2S+1)\frac{4\pi V}{h^3}\int_0^\infty dp\, p^2 \frac{1}{\exp\{(\frac{p^2}{2m}-\mu)/kT\}-1}$$

$\left(\frac{p^2}{2mkT} = y\right)$

$$= \frac{2S+1}{2}\frac{4\pi V}{h^3}(2mkT)^{3/2} \underbrace{\int_0^\infty dy \frac{y^{1/2}}{\zeta^{-1}e^y - 1}}$$

$$\zeta \int dy \frac{e^{-y}}{1-\zeta e^{-y}} y^{1/2}$$

$$\approx \zeta \underbrace{\int_0^\infty dy\, y^{1/2} e^{-y}}_{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} + \zeta^2 \underbrace{\int_0^\infty dy\, y^{1/2} e^{-2y}}_{\frac{1}{2^{5/2}}\sqrt{\pi}} + \ldots$$

$$\bar{N} \approx V\frac{2S+1}{\lambda^3}\underbrace{e^{\mu/kT}}_{\zeta}\Big[1 + \underbrace{\frac{1}{2^{3/2}}\underbrace{e^{\mu/kT}}_{\zeta}}_{\text{Quantenkorr.}}\Big]$$

mit $\lambda := \left(\frac{h^2}{2\pi m kT}\right)^{1/2}$ therm. Wellenlänge

$= \left(\frac{2S+1}{N_c}\right)^{1/3}$

Elim. von μ durch $\bar{N}$:

0. Näh. $\bar{N} = V\frac{2S+1}{\lambda^3}\zeta$

1. Näh. $\bar{N} = V\frac{2S+1}{\lambda^3}\zeta\left[1 + \frac{1}{2^{3/2}}\frac{\bar{N}\lambda^3}{V(2S+1)}\right]$

$$\Rightarrow \zeta = e^{\mu/kT} \approx \frac{\bar{N}\lambda^3}{V(2S+1)}\left[1 - \frac{1}{2^{3/2}}\frac{\bar{N}\lambda^3}{V(2S+1)}\right]$$

Innere Energie

$$U = (2S+1)\frac{4\pi V}{h^3}\int_0^\infty dp\, p^2 \frac{\frac{p^2}{2m}}{\exp\left\{\left(\frac{p^2}{2m}-\mu\right)/kT\right\}-1}$$

$$= \frac{2S+1}{2}\frac{4\pi V}{h^3}(2mkT)^{3/2} kT \int_0^\infty dy\, y^{3/2}\frac{\zeta e^{-y}}{1-\zeta e^{-y}}$$

$$\boxed{U \approx \frac{3}{2}kT\bar{N}\left[1 - \frac{1}{2^{5/2}}\frac{\lambda^3}{V(2S+1)}\bar{N}\right]}$$ kalor. Zustands-gl.

Quantenkorrektur

$$\boxed{pV = \frac{2}{3}U = kT\bar{N}\left[1 - \frac{1}{2^{5/2}}\frac{\lambda^3}{V(2S+1)}\bar{N}\right]}$$ therm. Zustandsgl.

↑

Bose-Anziehung: Quantenkorr.
(erniedrigter Druck)

<u>Bose-Einstein-Kondensation</u> (theor.: Einstein 1925
exp.: Ketterle, Cornell & Wieman 95
Nobelpreis 2001)

Grundzustand des Bose-Gas: $E_0 = 0$

$$\Rightarrow \langle N_0\rangle = \frac{1}{\zeta^{-1}-1} = \frac{\zeta}{1-\zeta}$$ mit Fugazität ζ

Besetzungszahl kann <u>makroskopisch</u> groß werden für $\zeta \approx 1$, d.h. $\langle N_0\rangle \approx \bar{N}$ (alle T. im Grundzustand kondensiert)

allg. $\bar{N} = \langle N_0\rangle + N'$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \shortparallel$

$\sum_{j>0} \langle N_j \rangle$

(i) $\zeta \ll 1$ (normale Phase): $\langle N_0 \rangle$ vernachlässigbar

$\Rightarrow$ verdünntes Bosegas, s.o.

(ii) $\zeta \approx 1$ (kondensierte Phase): $N' \approx \sum_{j>0} \frac{1}{e^{\beta E_j} - 1} \ll \bar{N}$

unabh. v. ζ

kont.

$$\frac{N'}{V} \approx (2S+1) \frac{1}{\lambda^3} \underbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dy\, y^{1/2} e^{-y}}_{1} \leftarrow \int \frac{y^{1/2}}{e^y - 1}$$

normale Komp. verhält sich wie ein verdünntes Bosegas

$$\frac{N'}{V} \approx \frac{2S+1}{\lambda^3} \sim T^{3/2}$$

$$\frac{N'}{\bar{N}} = \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$$

T_c def. durch

$$\zeta \approx \frac{\bar{N}}{V} \frac{2T_c}{2S+1} \overset{!}{=} 1$$

$$\boxed{\frac{\langle N_0 \rangle}{\bar{N}} = \begin{cases} 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} & T < T_c \\ 0 & T \geq T_c \end{cases}}$$

Bruchteil der kondens. Phase

Gebiet der Bose-Einstein-Kondensation

(2-kompon. Gas: normale + kondens. Phase)

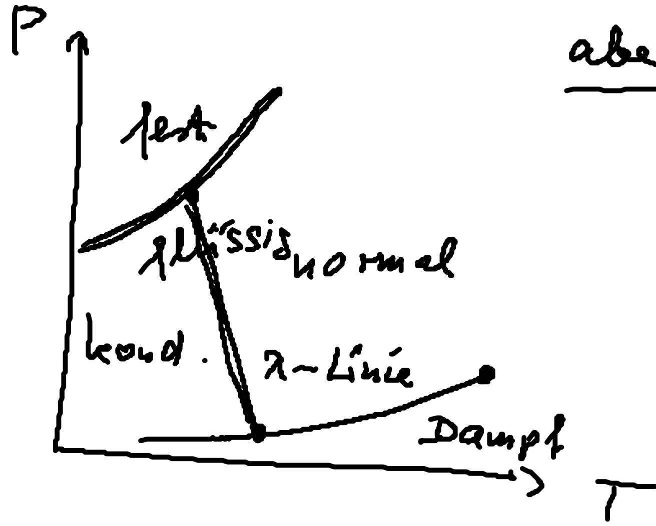
Phasenübergang bei T_c: normale Phase → kondens. Phase

(Bose-Einstein-Kondens.)

- makroskop. Quantenphänomen!

Anwendung: Suprafluide Phase von ^4He bei tiefe Temp. ähnelt 2-kompon. Flüssigkeit aus normaler u. kondens. Komponente (Fritz London: 1938)

aber: stark wechselwirkendes Bose-gas ⇒ max. 9% Kondensat



Bose-Einstein-Kond. mit schwach wechselwirk. Gasen

Vor. für Exp. $\frac{\bar{N}}{V} \cdot \lambda^3 > 2.61\ldots$

- hohe Phasenraumdichte
- sehr tiefe Temp. ($< 1 \mu K$ bei $\frac{\bar{N}}{V} \sim 10^4 cm^{-3}$)

→ Laserkühlung von Atomen (Nobelpreis 1997. Chu, Cohen-Tannoudji, Phillips)

+ Verdampf-kühlung

Lit. Phys. Bl. 57, no. 12 (Dez. 2001) ⇒ 90-95% Kondens.
Spektrum der Wiss. (")

Cornell & Wieman	: Rb-Atome	(1995)	einige 10^3
Ketterle	: Na	(")	10^5
Hulet	: Li	(1996)	
Kleppner	: spinpolaris. H-Atome	(1998)	

- kohärenter makroskop. Quantenzustand (Quantenflüsse.)
- Atomlaser : kohärente stim. Em. von Atomstrahlen
  $\rightarrow$ Interferenz (Ketterle, Hänsch 1999, Nobelpreis 2005
- Materiewellenverst.
- Materiewellen-Solitonen;

$$i\hbar\dot{\psi} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{ext} + g|\psi|^2\right)\psi(\vec{r},t)$$

  ψ makroskop. Wellenfkt. des Kondensats
- spontane Symm. brechung

$$\psi = \begin{cases} 0 & \text{für } T > T_c \\ \neq 0 & T < T_c \end{cases}$$

globaler Phase $\psi \sim e^{i\varphi}$