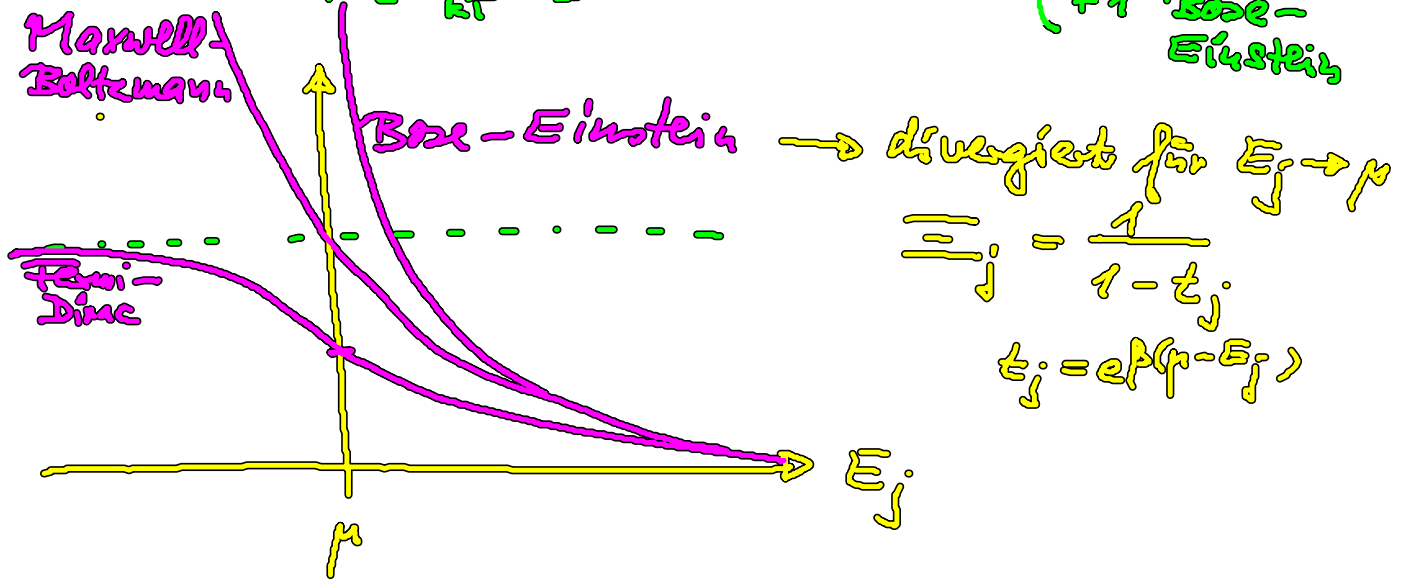


$$\langle N_j \rangle = \frac{1}{\exp\left[\frac{E_j - \mu}{kT}\right] - \epsilon}$$

mit $\epsilon = \begin{cases} -1 & \text{Fermi-Dirac} \\ 0 & \text{Maxwell-Boltzmann} \\ +1 & \text{Bose-Einstein} \end{cases}$



Übergang zur Quasikontinuum der Zustände $E = \frac{p^2}{2m}$

$$\ln \Xi = \sum_j \ln \bar{n}_j = - \sum_j \ln(1 - \zeta e^{-\beta E_j}) \quad (\zeta = e^{\beta \mu} \text{ Fugazität})$$

$$= - (2s+1) \frac{4\pi V}{h^3} \int dp p^2 \ln[1 - \zeta e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}]$$

part. Int.

$$= - (2s+1) \frac{4\pi V}{h^3} \left\{ \frac{p^3}{3} \ln[1 - \zeta e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}] \Big|_0^\infty - \int_0^\infty dp \frac{p^3}{3} \frac{\frac{p^2}{2m} \zeta e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}}{1 - \zeta e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}} \right\}$$

$$= \frac{2}{3} \beta (2s+1) \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \frac{\frac{p^2}{2m}}{\frac{1}{\zeta} \exp\left\{\frac{p^2}{2m}\right\} - 1}$$

$$= \frac{2}{3} \beta (2s+1) \frac{V}{h^3} \int_0^\infty dp 4\pi p^2 \langle N(p) \rangle E(p)$$

$$= \frac{2}{3} \beta U$$

$$\Rightarrow pV = kT \ln \Xi = \frac{2}{3} U$$

wie für Fermionen

Verdünntes Bosogas (quasi-klass., nichtentz. anderer Grenzfall)

Entw. nach Potenzen von $\zeta = e^{\frac{\mu}{kT}} \ll 1$

$$\bar{N} = \sum_j \langle N_j \rangle \approx (2S+1) \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \frac{1}{\exp\left\{\left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right)/kT\right\} - 1}$$

($\frac{p^2}{2mkT} = y$)

$$= \frac{2S+1}{2} \frac{4\pi V}{h^3} (2mkT)^{3/2} \int_0^\infty dy \frac{y^{1/2}}{\zeta^{-1} e^y - 1}$$

$$\zeta \int_0^\infty dy \frac{e^{-y}}{1 - \zeta e^{-y}} y^{1/2}$$

$$\approx \zeta \int_0^\infty dy y^{1/2} e^{-y} + \zeta^2 \int_0^\infty dy y^{1/2} e^{-2y}$$

$\frac{1}{2} \sqrt{\pi}$ $\frac{1}{2^{5/2}} \sqrt{\pi}$

$$\bar{N} \approx V \frac{2S+1}{\lambda^3} \underbrace{e^{\frac{\mu}{kT}}}_{\zeta} \left[1 + \frac{1}{2^{3/2}} \underbrace{e^{\frac{\mu}{kT}}}_{\zeta} \right]$$

mit $\lambda = \left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{1/2}$
 $= \left(\frac{2S+1}{N_c}\right)^{1/3}$
 them. Wellenlänge

Anartenkor.

Elim. von μ durch \bar{N} :

0. Näh. $\bar{N} = V \frac{2S+1}{\lambda^3} \zeta$

1. Näh. $\bar{N} = V \frac{2S+1}{\lambda^3} \zeta \left[1 + \frac{1}{2^{3/2}} \frac{\bar{N} \lambda^3}{V(2S+1)} \right]$

$\Rightarrow \zeta = e^{\frac{\mu}{kT}} \approx \frac{\bar{N} \lambda^3}{V(2S+1)} \left[1 - \frac{1}{2^{3/2}} \frac{\bar{N} \lambda^3}{V(2S+1)} \right]$

Innere Energie

$$U = (2S+1) \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{\infty} dp p^2 \frac{\frac{p^2}{2m}}{\exp\left\{\left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right)/kT\right\} - 1}$$
$$= \frac{2S+1}{2} \frac{4\pi V}{h^3} (2mkT)^{3/2} kT \int_0^{\infty} dy y^{3/2} \frac{\xi e^{-y}}{1 - \xi e^{-y}}$$

$$U \approx \frac{3}{2} kT \bar{N} \left[1 - \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\lambda^3}{V(2S+1)} \bar{N} \right]$$

kalor. Zustandsgl.

Quantenkorrektur

$$pV = \frac{2}{3} U = kT \bar{N} \left[1 - \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\lambda^3}{V(2S+1)} \bar{N} \right]$$

therm. Zustandsgl.

↑

Bose-Anziehung: Quantenkorr.
(erniedrigter Druck)

Bose-Einstein-Kondensation (theor.: Einstein 1925)
exp.: Ketterle, Comella & Wieman 95
Nobelpreis 2001

Grundzustand des Bose-Gas: $E_0 = 0$

$$\Rightarrow \langle N_0 \rangle = \frac{1}{\xi^{-1} - 1} = \frac{\xi}{1 - \xi} \text{ mit Fugazität } \xi$$

Besetzungszahl kann makroskopisch groß werden

für $\xi \approx 1$, d.h. $\langle N_0 \rangle \approx \bar{N}$ (alle T.

allg. $\bar{N} = \langle N_0 \rangle + N'$
" "

im Grundzustand kondensiert)

(i) $\zeta \ll 1$ (normale Phase): $\langle N_0 \rangle$ vernachlässigbar
 \Rightarrow verdünntes Bosegas, s.o.

(ii) $\zeta \approx 1$ (kondensierte Phase): $N' \approx \sum_{j>0} \frac{1}{e^{\beta \epsilon_j} - 1} \ll \bar{N}$
unabh. v. ζ

$$\frac{N'}{V} \stackrel{\text{kont.}}{\approx} (2S+1) \frac{1}{\lambda^3} \underbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dy y^{1/2} e^{-y}}_{\int \frac{y^{1/2}}{e^y - 1}}$$

normale Komp. verhält sich wie ein verdünntes Bosegas

$$\frac{N'}{V} \approx \frac{2S+1}{\lambda^3} \sim T^{3/2}$$

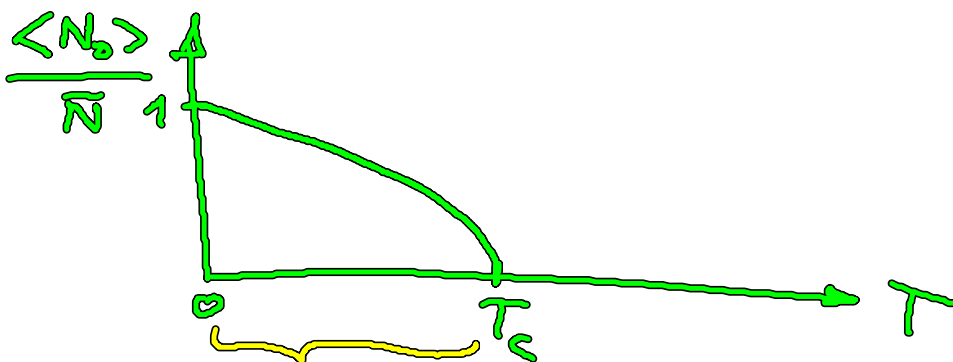
$$\frac{N'}{V} = \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}$$

T_c def. durch

$$\zeta \approx \frac{\bar{N}}{V} \frac{2T_c}{2S+1} \stackrel{!}{=} 1$$

$$\frac{\langle N_0 \rangle}{\bar{N}} = \begin{cases} 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} & T < T_c \\ 0 & T \geq T_c \end{cases}$$

Bruchteil der kondens. Phase



Gebiet der Bose-Einstein-Kondensation

(2-kompon. Gas: normale + kondens. Phase)

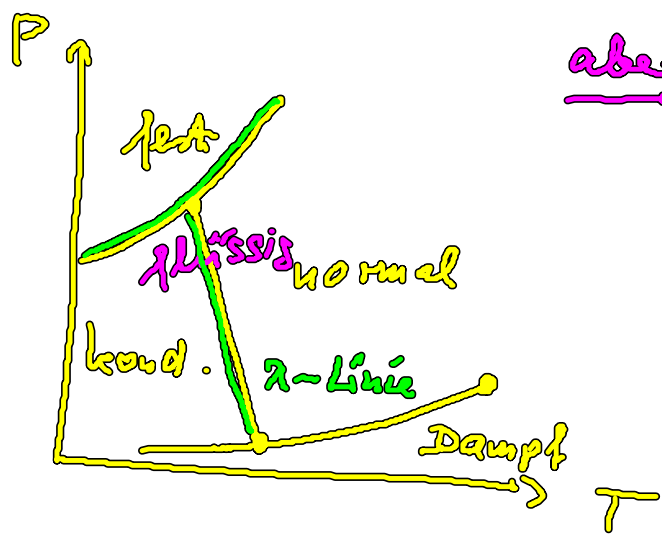
Phasenübergang bei T_c : normale Phase \rightarrow kondens. Phase

(Bose-Einstein-Kondens.)

- makroskop. Quantenphänomen!

Anwendung : Suprafluide Phase von ^4He bei tiefe Temp. ähnlich 2-Kompon. Flüssigkeit aus normaler u. kondens. Komponente (Fritz London: 1938)

aber : stark wechselwirkendes Bose-Gas \Rightarrow max. 9% Kondensat



Bose-Einstein-Kond. mit schwach wechselwirk. Gasen

Var. für Exp. $\frac{\bar{N}}{V} \cdot \lambda^3 > 2.61...$

- hohe Phasendichte
- sehr tiefe Temp. ($< 1 \mu\text{K}$ bei $\frac{\bar{N}}{V} \sim 10^4 \text{ cm}^{-3}$)

\rightarrow Laserkühlung von Atomen (Nobelpreis 1997. Chu, Cohen-Tannoudji, Phillips) + Verdampfungskühlung

Lit. Phys. Bl. 57, no. 12 (Dec. 2001) Spektrum der Wiss. (")

\Rightarrow 90-95% Kondens.

Comell & Wieman	: Rb-Atome	(1995,	einge 10^3
Ketterle	: Na	(")	10^5
Hulet	: Li	(1996,	
Kleppner	: spinpolaris. H-Atome	(1998)	

- kohärente makroskop. Quantenzustand (Quantenflüsse)
- Atomlaser: kohärente stim. Em. von Atomenstrahlen
→ Interferenz (Kettler, Hänsch 1999, Nobelpreis 2005)

- Materiewellenverst.

- Materiewellen-Solitonen;

$$i\hbar\dot{\psi} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{\text{ext}} + g|\psi|^2 \right) \psi(\mathbf{r}, t)$$

ψ makroskop. Wellenfkt. des Kondensats

- spontane Symm. Brechung

$$\psi = \begin{cases} 0 & \text{für } T > T_c \\ \neq 0 & T < T_c \end{cases} \quad \text{globale Phase} \\ \psi \sim e^{i\varphi}$$