

# 4.3 Diffusion

## 4.3.1 Transport in Zellen?

• Diffusion anwendbar auf

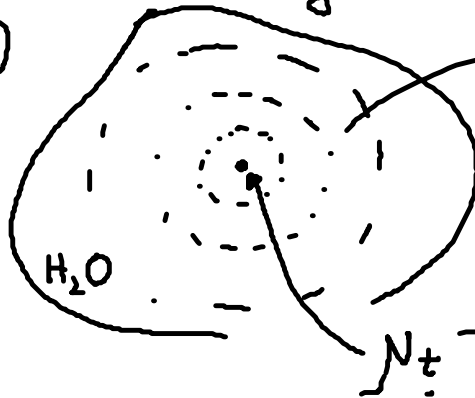
Kolloide  
 Tinte-Moleküle  
 kleine- "

} in  $H_2O$

↳ Bsp:  $D \approx 10^{-9} \frac{m^2}{s} = 1 \frac{\mu m^2}{ms}$  (4.17)

• Messung von D: (i) Beobachtung einzelner Teilchen  $\rightarrow \langle \underline{x}^2 \rangle$

(ii)



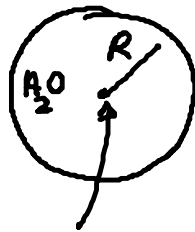
Konzentrationsprofil:  
 $c(\underline{x}, t) = N_t P(\underline{x}, t)$  (4.18)

$\rightarrow 6Dt = \frac{1}{N_t} \int \underline{x}^2 c(\underline{x}, t) d^3x$   
 $= \langle \underline{x}^2 \rangle$

$N_t$  Tinteilchen,  $t=0$

• Bsp:

Bakterium:  $R = 1 \mu m$   
 menschl. Zelle:  $R = 10 \mu m$



$t = \frac{R^2}{6D} \approx \begin{cases} 0,2 ms \\ 20 ms \end{cases}$   
 $D = 1 \frac{\mu m^2}{s}$

$N_t$  Zuckermoleküle

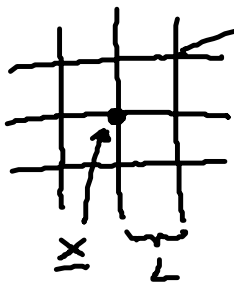
$\Rightarrow$  Mikrom-Bereich: Diffusion schnell (Bsp. Bakterium)

darüber: andere Transportmechanismen (Bsp: Mikrotubuli)

Bsp: Nervenzellen: bis zu 1m  $\infty$

## 4.3.2 Diffusionsgleichung

• 2  $P(x, t) \stackrel{\text{Gitter}}{=} \frac{1}{z} \sum_{i=1}^z P(x - b_i, t - \Delta t)$



Zahl der  
Nach-  
barn

Taylor:

$$P(x, t) - \frac{\partial P}{\partial t} \Delta t - \underbrace{\sum_i b_i \cdot \nabla P}_{\rightarrow = 0} + \frac{1}{2} \underbrace{b_{i\alpha} b_{i\beta}}_{\substack{\text{wegen } \sum_i b_i = 0 \\ \text{wegen } \sum_i b_i = 0}} \frac{\partial^2 P}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$$

$$\frac{1}{2} \sum_i b_{i\alpha} b_{i\beta} \stackrel{!}{=} \frac{1}{d} L^2 \delta_{\alpha\beta}$$

Raum-  
dimension

(i)  $= \tilde{c} \delta_{\alpha\beta}$ , wegen kubischer Symmetrie

(ii) Spur:  $\alpha = \beta$

$$\frac{1}{2} \sum_i b_{i\alpha} b_{i\alpha} = \frac{1}{2} \sum_i b_i^2 = L^2$$

$$\stackrel{!}{=} d \tilde{c}$$

$$\rightarrow \tilde{c} = \frac{L^2}{d}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} - D \Delta P = 0 \quad (4.19)$$

$$D = \frac{1}{2d} \frac{L^2}{\Delta t}$$

... Diffusionsgleichung

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad \dots \text{Laplace-Operator in 3 Dimensionen}$$

• phänomenolog. Herleitung:

(i) Erhaltung der Teilchenzahl:

$$\boxed{\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{j} = 0} \quad (4.20)$$

Teilchenzahl-Stromdichte  
("Kontinuitätsgleichung")

(ii) Materialgesetz:

$$\boxed{\underline{j} = -D \underline{\nabla} c} \quad (4.21)$$

1. Ficksches Gesetz

(Strom verursacht  $\underline{\nabla} c$  auszu-  
gleichen!)

$$\left( \begin{array}{l} \operatorname{div} \operatorname{grad} \\ = \nabla_i \nabla_i = \Delta \end{array} \right)$$

(ii) in (i)

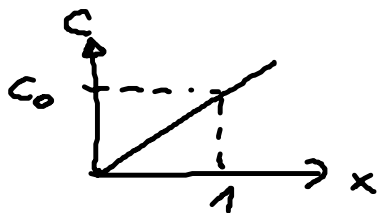
$$\boxed{\frac{\partial c}{\partial t} - D \Delta c = 0} \quad (4.22)$$

... 2. Ficksches Gesetz

D ... Materialparameter,  
mikroskop. Ausdruck in (4.19)

• Lösungen: (i)  $c(x, t) = c_0 \hat{=}$  thermodyn. GG

(ii) 1D:  $c(x, t) = c_0 x$  ... stationäres Profil



(ständig Zufuhr und  
Abfuhr von Teilchen)

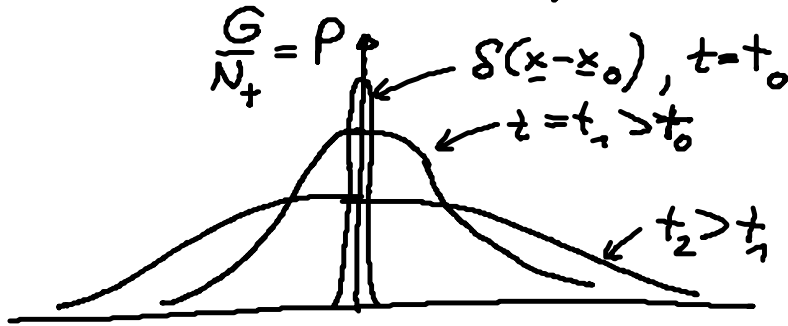
(iii) Greensche Fkt.:  $G(x-x_0, t-t_0)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D\Delta\right) G(\underline{x}-\underline{x}_0, t-t_0) = N_t \delta(\underline{x}-\underline{x}_0) \delta(t-t_0) \quad (4.23)$$

o.B.  
 $\xrightarrow{\text{[Übungen]}}$   
 in 3D!

$$G(\underline{x}-\underline{x}_0, t-t_0) = \frac{N_t}{[4\pi D(t-t_0)]^{3/2}} e^{-\frac{(\underline{x}-\underline{x}_0)^2}{4D(t-t_0)}} \quad \dots \text{Gaußsche Verteilung} \quad (4.24)$$

$$\langle (\underline{x}-\underline{x}_0)^2 \rangle = 6D(t-t_0) \quad \begin{matrix} \text{ooo} \\ \text{ooo} \end{matrix}$$



Konzentrationsunterschiede werden ausgeglichen

◦ ideale Polymerkette:  $t \rightarrow N$

End-zu-End-Vektor  $\underline{x}$  für Kette mit Länge  $N$

... Gaußsche Verteilung

• Bem: (i) Diffusion  $\equiv$  Zufallsprozess

$\longleftrightarrow$  (4.22)  $\triangleq$  deterministisches Gesetz für  $c(\underline{x}, t) \sim P(\underline{x}, t)$  ???

statistische Fluktuationen:  $c(\underline{x}, t) - c_{\text{real}}(\underline{x}, t)$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{N_t}} \rightarrow 0, N_t \rightarrow \infty$$

...thermo-dyn. Limes

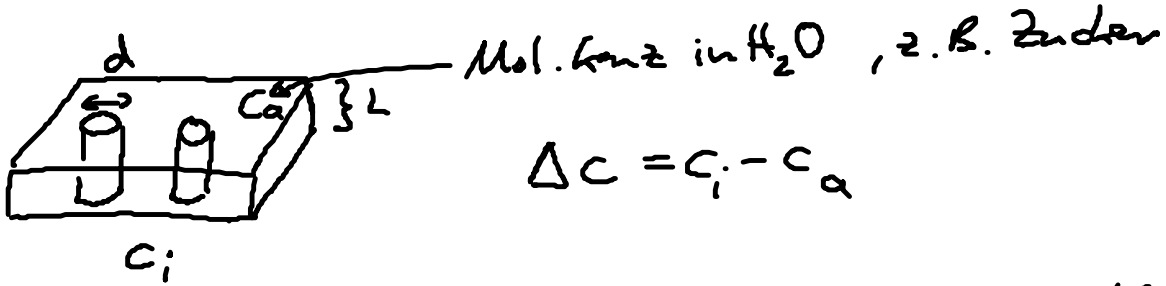
## 4.4. Diffusion in der Biologie

4.4.1. Durchlässigkeit (Permeabilität) von künstl.

Membranen

• Membran-Modelle:

(i) passive Kanäle / Poren:



$L \gg d \rightarrow$  statisches 1D-Diffusion durch Kanäle:

$$j_k = -D \frac{\Delta c}{L}$$

lineares Konz. profil

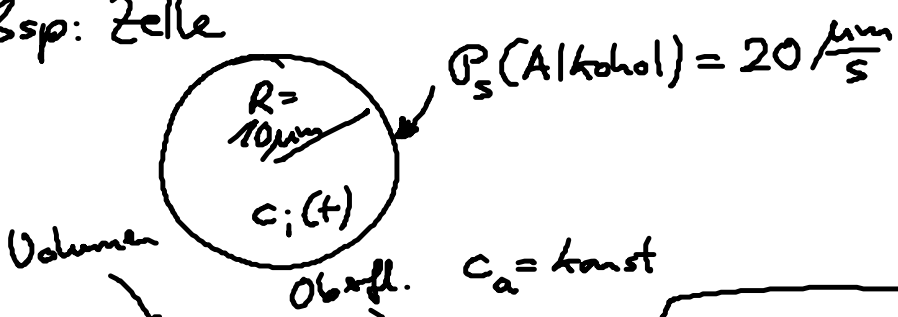
mit  $\alpha$  ... Flächenanteil der Poren

$$j_M = -P_S \Delta c \quad (4.25)$$

$$P_S = \alpha \frac{D}{L}$$

Permeabilität der Membran für gelösten Stoff („solute“)

Bsp: Zelle



$$\frac{dV\Delta c}{dt} = j_M A \xrightarrow{(4.25)}$$

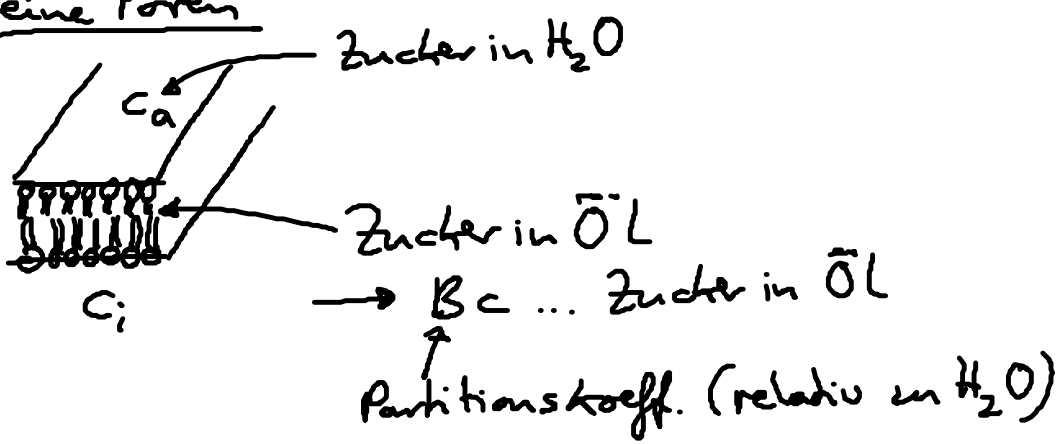
$$\frac{d}{dt} \Delta c = - \left( \frac{A P_S}{V} \right) \Delta c \quad (4.26)$$

$$\Delta c = \Delta c(0) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau = \frac{V}{A P_S}$$

hier:  $\tau = 0,2 s !!$

(ii) keine Poren



$\Rightarrow$

$$j_m = -P_s \Delta c$$

$$P_s = \frac{BD}{L}$$

(4.27)

Zucker in Öl

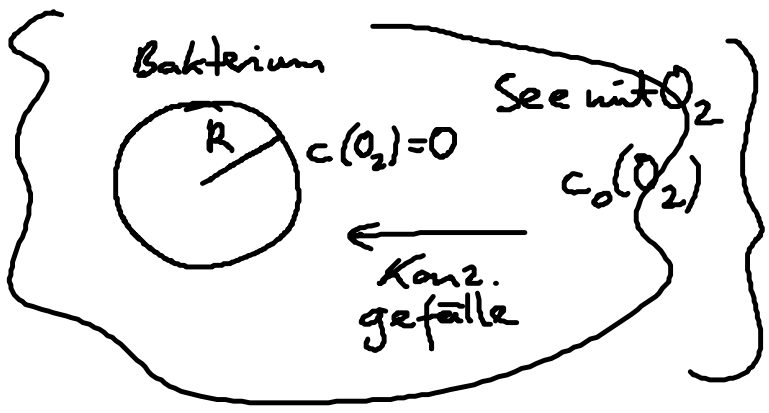
Bsp: Glukose:  $P_s = 10^{-3} \frac{\mu m}{s}$

$Na^+, Cl^-$ :  $P_s = 1 - 100 \frac{\mu m}{s}$

Zellen:  $P_s$  viel größer

$\rightarrow$  weitere Mechanismen

### 4.4.2 Bakterieller Metabolismus



mögliche  $O_2$ -Konsum (pro Zeit)

$I = 4\pi DR c_o(O_2)$  (4.28)

tatsächlicher  $O_2$ -Konsum  $\sim R^3$

$R < R_{limit}$