

4.3 Diffusion

4.3.1 Transport in Zellen?

• Diffusion anwendbar auf

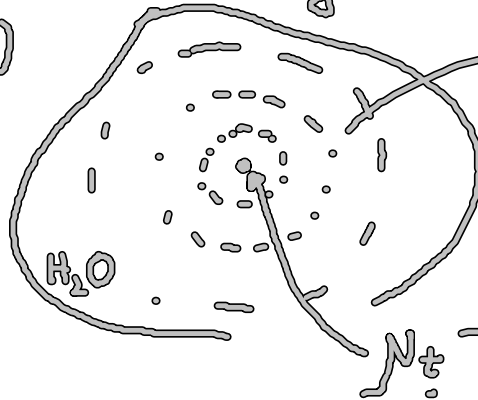
Kolloide
 Tinte-Moleküle
 kleine- "

} in H_2O

→ Bsp: $D \approx 10^{-9} \frac{m^2}{s} = 1 \frac{\mu m^2}{ms}$ (4.17)

• Messung von D : (i) Beobachtung einzelner Teilchen → $\langle x^2 \rangle$

(ii)



Konzentrationsprofil:

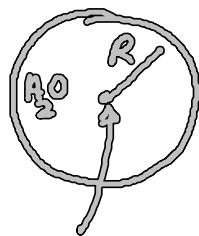
$$c(x,t) = N_t P(x,t) \quad (4.18)$$

$$\rightarrow 6Dt = \frac{1}{N_t} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 c(x,t) dx = \langle x^2 \rangle$$

N_t Tinkerteilchen, $t=0$

• Bsp:

Bakterium: $R = 1 \mu m$
 menschl. Zelle: $R = 10 \mu m$



N_t Zuckermoleküle

$$t = \frac{R^2}{6D} = \begin{cases} 0,2 ms \\ 20 ms \end{cases}$$

$$D = 1 \frac{\mu m^2}{s}$$

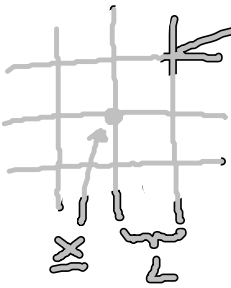
⇒ Mikron-Bereich: Diffusion schnell (Bsp. Bakterium)

darüber: andere Transportmechanismen (Bsp: Mikrotubuli)

Bsp: Nervenzellen: bis zu 1m !!

4.3.2 Diffusionsgleichung

• ? $P(\underline{x}, t) \stackrel{\text{Glv}}{=} \frac{1}{Z} \sum_{i=1}^Z P(\underline{x} - \underline{b}_i, t - \Delta t)$



zahl der
Nach-
barn

Taylor:

$$P(\underline{x}, t) - \frac{\partial P}{\partial t} \Delta t - \underbrace{\underline{b}_i \cdot \nabla P}_{\sum \underline{b}_i = 0} + \frac{1}{2} \underbrace{b_{i\alpha} b_{i\beta}}_{\substack{\text{Raum-} \\ \text{dimension}}} \frac{\partial^2 P}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$$

wegen $\sum \underline{b}_i = 0$

$$\frac{1}{2} \sum_i b_{i\alpha} b_{i\beta} \stackrel{!}{=} \frac{1}{d} L^2 \delta_{\alpha\beta}$$

Raum-
dimension

(i) = $\tilde{C} \delta_{\alpha\beta}$, wegen kubischer
Symmetrie

(ii) Spur: $\alpha = \beta$

$$\frac{1}{2} \sum_i b_{i\alpha} b_{i\alpha} = \frac{1}{2} \sum_i b_i^2 = L^2$$

$$\stackrel{!}{=} d \tilde{C}$$

$$\rightarrow \tilde{C} = \frac{L^2}{d}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} - D \Delta P = 0 \quad (4.19)$$

$$D = \frac{1}{2d} \frac{L^2}{\Delta t}$$

... Diffusionsgleichung

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad \dots \text{Laplace-Operator in 3 Dimensionen}$$

• phänomenolog. Herleitung:

(i) Erhaltung der Teilchenzahl:

$$\boxed{\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{j} = 0} \quad (4.20)$$

Teilchenzahl-Stromdichte
("Kontinuitätsgleichung")

(ii) Materialgesetz:

$$\boxed{\underline{j} = -D \underline{\nabla} c} \quad (4.21)$$

1. Ficksches Gesetz

(Strom verursacht $\underline{\nabla} c$ auszu-
gleichen!)

$$\left(\operatorname{div} \operatorname{grad} \right) \\ = \nabla_i \nabla_i = \Delta$$

(i) in (i) \Rightarrow

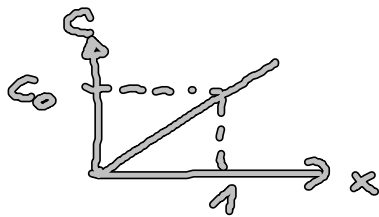
$$\boxed{\frac{\partial c}{\partial t} - D \Delta c = 0} \quad (4.22)$$

.. 2. Ficksches Gesetz

D .. Materialparameter,
mikroskop. Ausdruck in (4.18)

• Lösungen: (i) $c(x,t) = c_0 \hat{=}$ thermodyn. GG

(ii) 1D: $c(x,t) = c_0 x$.. stationäres Profil



(ständig Zufuhr und
Abfuhr von Teilchen)

(iii) Greensche Fkt.: $G(x-x_0, t-t_0)$

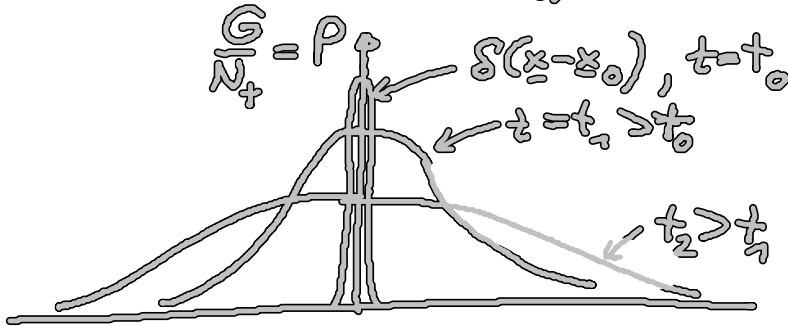
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D\Delta\right) G(x-x_0, t-t_0) = N_t \delta(x-x_0) \delta(t-t_0) \quad (4.23)$$

o.B.
 \Rightarrow
 [Übungen]
 in 3D!

$$G(x-x_0, t-t_0) = \frac{N_t}{[4\pi D(t-t_0)]^{3/2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)}} \quad (4.24)$$

... Gaußsche Verteilung (4.24)

$$\langle (x-x_0)^2 \rangle = 6D(t-t_0) \quad \text{ooo}$$



Konzentrationsunterschiede werden ausgeglichen

◦ ideale Polymerkette: $t \rightarrow N$

End-zu-End-Vektor \underline{x} für Kette mit Länge N

... Gaußsche Verteilung

• Bem: (i) Diffusion = Zufallsprozess

\leftrightarrow (4.22) = deterministisches Gesetz für $c(x,t) \sim P(x,t)$???

statische Fluktuationen: $c(x,t) - c_{\text{real}}(x,t)$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{N_t}} \rightarrow 0, N_t \rightarrow \infty$$

...thermo-dyn. Limes

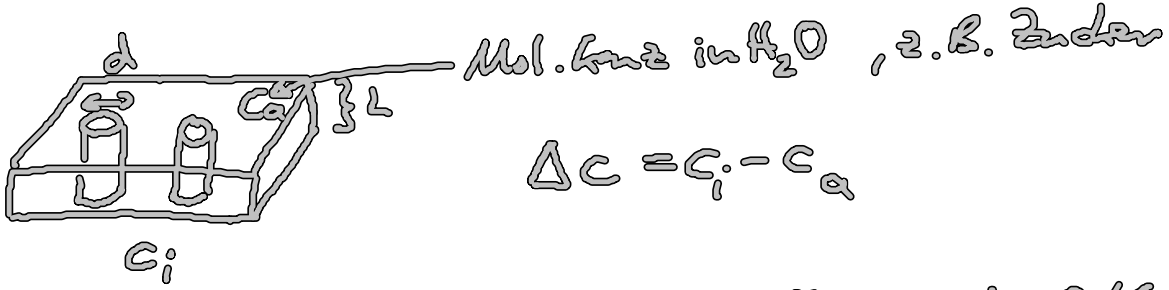
4.4. Diffusion in der Biologie

4.4.1. Durchlässigkeit (Permeabilität) von künstl. Membranen

Membranen

• Membran-Modelle:

(i) passive Kanäle / Poren:



$L \gg d \rightarrow$ statisches 1D-Diffusion durch Kanäle:

$$j_k = -D \frac{\Delta c}{L}$$

lineares Konz. profil

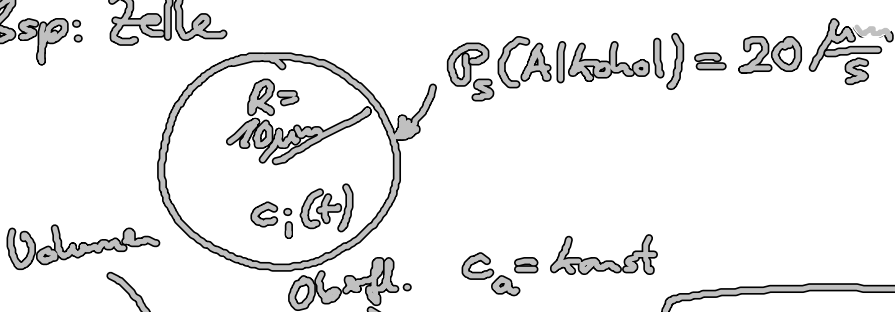
mit α .. Flächenanteil der Poren

$$j_M = -P_S \Delta c \quad (4.25)$$

$$P_S = \alpha \frac{D}{L}$$

Permeabilität der Membran für gelösten Stoff („solute“)

Bsp: Zelle



$$\frac{dV \Delta c}{dt} = j_M A \xrightarrow{(4.25)}$$

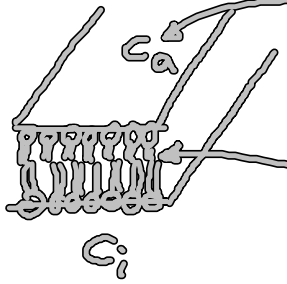
$$\frac{d \Delta c}{dt} = - \left(\frac{A P_S}{V} \right) \Delta c \quad (4.25)$$

$$\Delta c = \Delta c(0) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau = \frac{V}{A P_S}$$

hier: $\tau = 0,2 s !!$

(ii) keine Poren Zucker in H_2O



Zucker in Öl

→ B_c ... Zucker in Öl

↑
Partitionskoeff. (relativ zu H_2O)

⇒

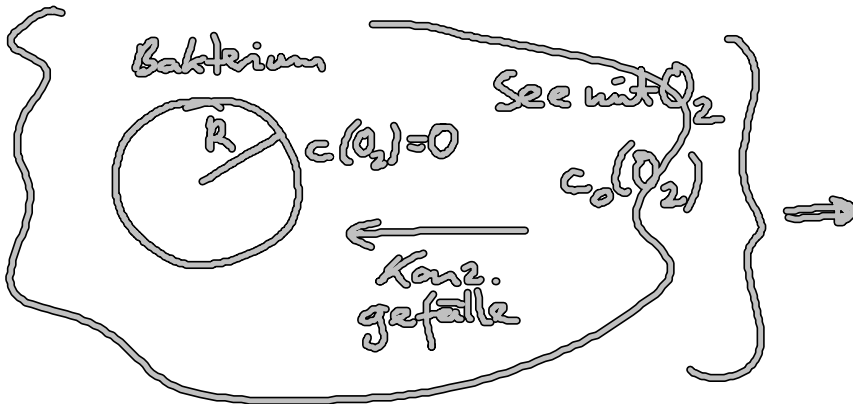
$$j_m = -P_s \Delta c \quad (4.27)$$

$$P_s = \frac{BD}{L}$$

Zucker in Öl

Bsp: Glukose: $P_s = 10^{-3} \frac{\mu m}{s}$ } Zellen: P_s viel größer
 Na^+, Cl^- : $P_s = 1-100 \frac{\mu m}{s}$ } → weitere Mechanismen

4.4.2 Bakterieller Metabolismus



mögliche O_2 -Konsum (pro Zeit)
 $I = 4\pi DR c_0(O_2) \quad (4.28)$
 tatsächlicher O_2 -Konsum $\sim R^3$

$R < R_{limit}$