

# 11. Maschinen in Membranen

• Ionen-Pumpen, ...

↳ Bsp: Axon einer Nervenzelle

## 11.1 Elektro-osmotischer Effekt

• Ionen-Konzentrationsgefälle  $\rightarrow$  Nernst-Potential

↳ (i) Ladungsverteilung

↳ (ii) Potentialverlauf  $V(r)$ :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \underline{E} &= \frac{\rho(r)}{\epsilon_0 \epsilon} \\ \underline{E} &= -\operatorname{grad} V \end{aligned} \right\} \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon}$$
$$\rho = e [c_+(r) - c_-(r)] \Rightarrow V$$

(iii)  $\Delta V = V_2 - V_1$ ?

Boltzmann:  $c(r) \sim e^{-zeV(r)/k_B T}$

↑  
Ionen-Valenz

$$\rightarrow \Delta V = V_2 - V_1 = -\frac{k_B T}{ze} \ln \frac{c_2}{c_1} \dots \text{Nernst-Relation (11.1)}$$

$$\rightarrow \mu_1 = k_B T \ln \frac{c_1}{c_0} + ezV_1 + \mu^0 = \mu_2 \dots \text{elektrochem. Potential (11.2)}$$

• Donnan-GG: → "ruhend" Donnan-Membran-Potential

Zelle: permeable Ionen:

z.B.  $\text{Na}^+$ ,  $\text{K}^+$ ,  $\text{Cl}^-$  + neg. geladene Proteine/Nucleinsäuren:  $\Sigma_{\text{macro}} = -125 \text{ mM}$   
vorgegeben

außen:  $c_{1,\text{Na}^+} + c_{1,\text{K}^+} - c_{1,\text{Cl}^-} = 0$  (M.3.1) (Ladungsneutr.)

z.B.  $(140 + 10 - 150) \text{ mM} = 0$

innen:  $c_{2,\text{Na}^+}$  etc,  $\Delta V$  } 4 Unbekannte

$c_{2,\text{Na}^+} + c_{2,\text{K}^+} - c_{2,\text{Cl}^-} + \frac{\Sigma_{\text{macro}}}{e} = 0$  (M.3.2)

Nernst:  $\Delta V = -\frac{k_B T}{e} \ln \frac{c_{2,\text{Na}^+}}{c_{1,\text{Na}^+}} = \dots \text{K}^+ \dots = \text{Cl}^-$  (M.3.3/4)

⇒  $\boxed{\frac{c_{1,\text{Na}^+}}{c_{2,\text{Na}^+}} = \frac{c_{1,\text{K}^+}}{c_{2,\text{K}^+}} = \frac{c_{2,\text{Cl}^-}}{c_{1,\text{Cl}^-}}}$  ... Gibbs-Donnan-Relation im Donnan-GG

(M.3.1-4) → Übung? für Bsp. werte von  $c_{1,\text{Na}^+}$  ...

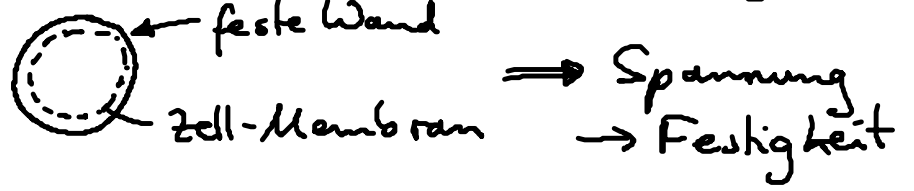
$\boxed{c_{2,\text{Na}^+} = 210 \text{ mM}, c_{2,\text{K}^+} = 15 \text{ mM}, c_{2,\text{Cl}^-} = 100 \text{ mM}}$   
 $\Delta V = -10 \text{ mV}$  (M.4)

11.2. Ionen-Pumpen

• Probleme: (i) osmotischer Druck:

$c_{2,\text{tot}} - c_{1,\text{tot}} \approx 25 \text{ mM} \xrightarrow{\times k_B T} -6 \cdot 10^4 \text{ Pa}$   
 → Eukaryotische Zellen besitzen

dagegen: E.coli-Bakterien, Pflanzen, Algen, Pilze



(ii)  $\text{Na}^+$ -Anomalie  $\rightarrow$  kein Donnan-GG

$\Rightarrow$  Ionen-Pumpen  $\equiv$  aktiver Transport nötig  
für stationäres Nicht-GG

• Hypothese der Ohmschen Leitung: ( $\rightarrow$  aktive Kraft!)

(i) unterscheide:  $V_i^N = -\frac{k_B T}{ze} \ln \frac{c_{2,i}}{c_{1,i}}$  (vgl. Gl. (11.1) -- Nernst-Potential)

$\Delta V$  ... wirklicher Potentialfall

$\rightarrow$  Stromdichte:

$$j_{q,i} = z_i e j_i = g_i (\Delta V - V_i^N) \quad (11.5)$$

Ohmsche Hypothese

$g_i$  ... Leitfähigkeit/Fläche

Bsp:  $g_i = 5 \frac{1}{\Omega \text{m}^2}$  (Tintenfisch-Axon)

(ii) gültig nur nahe Donnan-GG:  $\Delta V \approx V_i^N$ ,  $g_i(c_{1,i}^{GG})$

(iii) sonst:  $j_{q,i} \sim (\Delta V - V_i^N)^n$  ... nichtlineare Term

$$g_i(c_{1,i}, \Delta V)$$

(iv)  $g \leftrightarrow$  Permeabilität:  $P_s$ ,  $j_i = P_s \Delta c!$  (11.6)

$$\frac{(11.5) \& \Delta U = 0 \& (11.1)}{(11.6)} \rightarrow$$

$$g = \frac{P_s (ze)^2 c}{k_B T} \quad (11.7) \quad \text{für } \Delta c \approx 0$$

$g \sim c \rightarrow$  keine intrinsische Membrangröße

(v) Levi et al. (1948): radioaktive  $\text{Na}^+$ -Ionen z.B. für  $c_2$   
 $\rightarrow$  Strom beobachtbar

Hodgkin & Katz: Muskelzelle, fast Ohmsch

Tintenfisch Axon:  $g_{\text{K}^+} \approx 25 g_{\text{Na}^+} \approx 2 g_{\text{Cl}^-}$  im GG  
 (11.8)

• Hinweise auf Ionen-Pumpen:

Ussing & Zehrwil (1951): lebende Froschhaut:

$$j_{\text{Na}^+} \neq 0 \quad \text{für } \Delta c = \Delta U = 0$$

$$\Rightarrow j_{\text{Na}^+} = \frac{g_{\text{Na}^+}}{e} (\Delta V - V_{\text{Na}^+}^N) + \underbrace{j_{\text{Na}^+}^P}_{>0} \quad (11.9)$$

Pumpstrom, von 2  $\rightarrow$  1  
 gespeist durch Stoffwechsel

Hodgkin & Katz:  $j_{\text{K}^+}^P < 0$

Exp.  $\rightarrow$  Pumpen-Hypothese:

(i) Energiequelle: ATP } Maschine mit enger Kopplung

(ii)  $j_{\text{Na}^+}^P > 0, j_{\text{K}^+}^P < 0$  ... gekoppelt

(iii) genauer:  $3 \text{Na}^+ : 2 \rightarrow 1$   
 $2 \text{K}^+ : 1 \rightarrow 2$  } elektrogenerische Pumpe

(11.10)

• Identifikation:

Skou (1957): Neuronen von Krebsbeinen

Pumpe  $\equiv$  Enzym: ATPase



• Energiebilanz/pro Zyklus:

$$\Delta F = 3 \times \left[ \underbrace{-e (\Delta V - V_{Na^+}^N)}_{\substack{2 \rightarrow 1 \\ -60 \text{ mV} \quad 54 \text{ mV}}} \right] + 2 \times \left[ \underbrace{e (\Delta V - V_{K^+}^N)}_{\substack{1 \rightarrow 2 \\ -60 \text{ mV} \quad -75 \text{ mV}}} \right]$$

115 meV 15 meV

$$\Delta F = 375 \text{ meV} = 14 k_B T_r$$

$$\text{ATP-Hydrolyse: } 20 k_B T_r$$

---


$$6 k_B T_r \rightarrow \text{W\u00e4rme}$$

• Osmotisches GG:

$$c_{2, Na^+} < c_{1, Na^+} \quad \& \quad \text{gel\u00f6ste Stoffe in Zelle}$$

• Absch\u00e4tzung f\u00fcr  $\Delta V$ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{station\u00e4res Nicht-GG} \\ \& \text{ Ladungsneutralit\u00e4t} \end{array} \right\} \begin{array}{l} j_{K^+}^P = -j_{K^+}^{Ohm} = -\frac{2}{3} j_{Na^+}^P = +\frac{2}{3} j_{Na^+}^{Ohm} \end{array} \quad (11.11)$$

$$\xrightarrow[\text{\u00dcbung}]{(11.5)} \Delta V = \frac{2g_{Na^+} V_{Na^+}^N + 3g_{K^+} V_{K^+}^N}{2g_{Na^+} + 3g_{K^+}} \quad \begin{array}{l} \text{Tabelle} \\ 11.1 \\ (11.8) \end{array} \quad \begin{array}{l} -72 \text{ mV} \\ (11.12) \end{array}$$

(i)  $\Delta V(\text{real}) = -60 \text{ mV}$  Grund: Nichtlinearit\u00e4ten f\u00fcr  $Na^+$

(ii)  $g_{K^+} \gg g_{Na^+} \rightarrow \Delta V \approx V_{K^+}^N$

(iii)  $j_{Cl^-}^P = 0, j_{Cl^-}^{Ohm} \approx 0$