

11. Maschinen in Membranen

- Ionen-Pumpen, ...

↳ Bsp: Axon einer Nervenzelle

11.1 Elektro-osmotischer Effekt

- Ionen-Konzentrationsgefälle \rightarrow Nernst-Potential

↳ (i) Ladungsverteilung

↳ (ii) Potentialverlauf $V(r)$:

$$\left. \begin{array}{l} \text{div } \underline{E} = \frac{\rho(\underline{r})}{\epsilon_0 \epsilon} \\ \underline{E} = -\text{grad } V \end{array} \right\} \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon}$$
$$\rho = e [c_+(r) - c_-(r)] \Rightarrow V$$

(iii) $\Delta V = V_2 - V_1$?

Boltzmann: $c(r) \sim e^{-zeV(r)/k_B T}$

Ionen Valenz

$$\rightarrow \Delta V = V_2 - V_1 = -\frac{k_B T}{ze} \ln \frac{c_2}{c_1} \dots \text{Nernst-Relation (11.1)}$$

$$\rightarrow \mu_1 = k_B T \ln \frac{c_1}{c_0} + ezeV_1 + \mu^0 = \mu_2 \dots \text{elektrochem. Potential (11.2)}$$

• Donnan-GG: → "ruhelndes" Donnan-Membran-Potential

Zelle: permeable Ionen:
z.B. Na⁺, K⁺, Cl⁻ + neg. geladene Proteine / Nukleinsäuren: $\Sigma_{macro} = -125 \text{ mM}$

außen: $C_{1,Na^+} + C_{1,K^+} - C_{1,Cl^-} = 0$ (M.3.1) (Ladungsneutr.)
z.B. $(140 + 10 - 150) \text{ mM} = 0$

innen: C_{2,Na^+} etc, ΔV } 4 Unbekannte
 $C_{2,Na^+} + C_{2,K^+} - C_{2,Cl^-} + \frac{\Sigma_{macro}}{e} = 0$ (M.3.2)

Nernst: $\Delta V = -\frac{k_B T}{e} \ln \frac{C_{2,Na^+}}{C_{1,Na^+}} = \dots K^+ \dots = Cl^-$ (M.3.3/4)

⇒ $\boxed{\frac{C_{1,Na^+}}{C_{2,Na^+}} = \frac{C_{1,K^+}}{C_{2,K^+}} = \frac{C_{1,Cl^-}}{C_{2,Cl^-}}}$... Gibbs-Donnan-Relation im Donnan-GG

(M.3.1-4) → Übung? für Bsp. werte von $C_{1,Na^+} \dots$

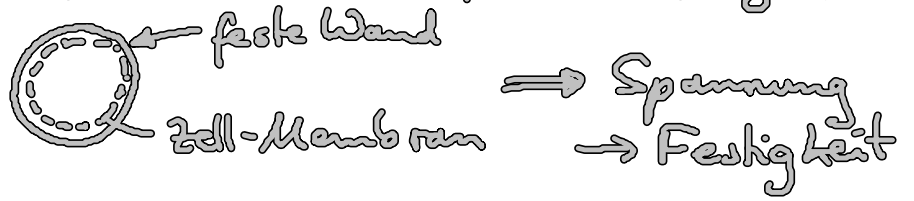
$C_{2,Na^+} = 210 \text{ mM}, C_{2,K^+} = 15 \text{ mM}, C_{2,Cl^-} = 100 \text{ mM}$
 $\Delta V = -10 \text{ mV}$ (M.4)

11.2. Ionen-Pumpen

• Probleme: (i) osmotischer Druck:

$C_{2,tot} - C_{1,tot} \approx 25 \text{ mM} \xrightarrow{\times k_B T} -6 \cdot 10^4 \text{ Pa}$
→ Eukaryotische Zellen besitzen

dagegen: E.coli-Bakterien, Pflanzen, Algen, Pilze



(ii) Na^+ -Anomalie \rightarrow kein Donnan-GG

\Rightarrow Ionen-Pumpen = aktiver Transport nötig für stationäres Nicht-GG

• Hypothese der Ohmschen Leitung: (\rightarrow aktive Kraft!)

(i) unentschieden: $V_i^N = -\frac{k_B T}{z_i e} \ln \frac{c_i}{c_{i,j}}$ (vgl. Gl. (11.1) - Nernst-Potential)

ΔV ... wirklicher Potentialfall

\rightarrow Stromdichte:

$$j_{q,i} = z_i e j_i = g_i (\Delta V - V_i^N) \quad (11.5)$$

Ohmsche Hypothese

g_i ... Leitfähigkeit/Fläche

Bsp: $g_i = 5 \frac{1}{\Omega \text{m}^2}$ (Tintenfisch-Axon)

(ii) gültig nur nahe Donnan-GG: $\Delta V \approx V_i^N$, $g_i(c_{i,j})$

(iii) sonst: $j_{q,i} \sim (\Delta V - V_i^N)^n$... nichtlineare Term

$$g_i(c_{i,j}, \Delta V)$$

(iv) $g \leftrightarrow$ Permeabilität $\cdot P_s$, $j_i = P_s \Delta c!$ (11.6)

$$\frac{(11.5) \& \Delta V = 0 \& (11.1)}{(11.6)}$$

$$g = \frac{P_s (ze)^2 c}{k_B T} \quad (11.7) \quad \text{für } \Delta c \approx 0$$

$g \sim c \rightarrow$ keine intrinsische Membrangröße

(v) Levi et al. (1948): radioaktive Na^+ -Ionen z.B. für c_2
 \rightarrow Strom beobachtbar

Hodgkin & Katz: Muskelzelle, fast Ohmsch

Tintenfisch Axon: $g_{\text{K}^+} \approx 25 g_{\text{Na}^+} \approx 2 g_{\text{Cl}^-}$ im GG
 (11.8)

• Hinweise auf Ionen-Pumpen:

Ussing & Zehren (1951): lebende Froshaut:

$$j_{\text{Na}^+} \neq 0 \quad \text{für } \Delta c = \Delta V = 0$$

$$\Rightarrow j_{\text{Na}^+} = \frac{g_{\text{Na}^+}}{e} (\Delta V - V_{\text{Na}^+}^N) + \underbrace{j_{\text{Na}^+}^P}_{>0} \quad (11.9)$$

Pumpstrom, von 2 \rightarrow 1
 gespeist durch Stoffwechsel

Hodgkin & Katz: $j_{\text{K}^+}^P < 0$

Exp. \rightarrow Pumpen-Hypothese:

(i) Energiequelle: ATP } Maschine mit enger Kopplung

(ii) $j_{\text{Na}^+}^P > 0, j_{\text{K}^+}^P < 0$ } .. gekoppelt

(iii) genauer: $3 \text{Na}^+ : 2 \rightarrow 1$
 $2 \text{K}^+ : 1 \rightarrow 2$ } elektrogenische Pumpe

(11.10)

• Identifikation:

Skou (1957): Neuronen von Krebsbeinen

Pumpe \equiv Enzym: ATPase



• Energiebilanz/pro Zyklus:

$$\Delta F = 3 \times \left[\underbrace{-e (\Delta V - V_{Na^+}^N)}_{\substack{2 \rightarrow 1 \\ -60 \text{ mV} \\ 15 \text{ meV}}} \right] + 2 \times \left[\underbrace{e (\Delta V - V_{K^+}^N)}_{\substack{1 \rightarrow 2 \\ -60 \text{ mV} \\ -75 \text{ mV} \\ 15 \text{ meV}}} \right]$$

$$\Delta F = 375 \text{ meV} = 14 k_B T_r$$

$$\text{ATP-Hydrolyse: } 20 k_B T_r$$

$$\underline{6 k_B T_r} \rightarrow \text{W\u00e4rme}$$

• Osmotisches GG:

$$c_{2, Na^+} < c_{1, Na^+} \quad \& \quad \text{gel\u00f6st Stoffe in Zelle}$$

• Absch\u00e4tzung f\u00fcr ΔV :

$$\left. \begin{array}{l} \text{station\u00e4res Nicht-GG} \\ \& \text{ Ladungsneutralit\u00e4t} \end{array} \right\} \begin{array}{l} j_{K^+}^P = -j_{K^+}^{Ohm} = -\frac{2}{3} j_{Na^+}^P = +\frac{2}{3} j_{Na^+}^{Ohm} \end{array} \quad (11.11)$$

$$\xrightarrow[\text{Abung}]{(11.5)} \Delta V = \frac{2g_{Na^+} V_{Na^+}^N + 3g_{K^+} V_{K^+}^N}{2g_{Na^+} + 3g_{K^+}} \stackrel{\text{Tab. 11.1}}{=} \stackrel{(11.8)}{=} -72 \text{ mV} \quad (11.12)$$

(i) $\Delta V(\text{real}) = -60 \text{ mV}$ Grund: Nichtlinearit\u00e4ten f\u00fcr Na^+

(ii) $g_{K^+} \gg g_{Na^+} \rightarrow \Delta V \approx V_{K^+}^N$

(iii) $j_{Cl^-}^P = 0, j_{Cl^-}^{Ohm} \approx 0$