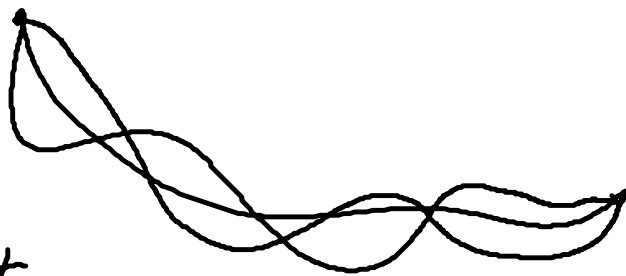


28.10.

28.10.2008



Functional

$$\mathcal{F}[\underline{u}] = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{F}(t, u_1(t), \dots, u_m(t); \dot{u}_1(t), \dots, \dot{u}_m(t))$$

stationärer Punkt  $\underline{u}$  erfüllt die

Euler-Lagrange-Gleichungen

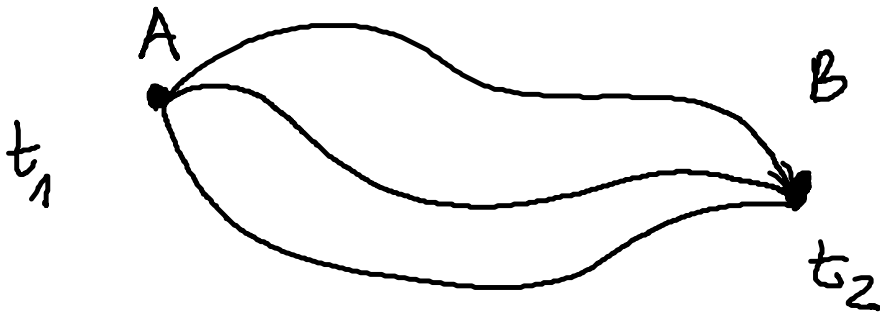
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{u}_1} - \frac{\partial F}{\partial u_1} = 0$$

$$\vdots$$
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{u}_m} - \frac{\partial F}{\partial u_m} = 0$$

Mechanisches System im Konfigurationsraum

(Raum der verallg. KO  $q_1, \dots, q_f$ )

$f$ : # Freiheitsgrade



Welche Kurven  $q_c(t)$  verbindet

A und B.

Mögliche Kurven sollen gleiche  
Anfangs- und Endpunkte haben.

$q(t)$   
 $\dot{q}(t)$  } Zustand des Systems

Hamiltonsches Prinzip: gegeben: Zeitintervall  $[t_1, t_2]$ ,

meh. System mit  $f$  Freiheitsgraden

Lagrangefunktion  $L(q(t), \dot{q}(t), t)$

üblicherweise  $L = T - V$

$T$ : kin. Energie,  $V$ : pot. Energie

Definiere das Wirkungsfunktional

$$S[q] \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t), t)$$

"Die Wirkung"

"Das Wirkungsintegral"

Dann gilt:

Die Dynamik des mech. Systems in der  
Zeits von  $t_1$  nach  $t_2$  wird durch einen  
stationären Punkt  $q(t)$  der Wirkung  
beschrieben

Die Natur wählt die Bahn  $q(t)$  soart,  
" dass die zugehörige Wirkung extremal  
wird "

- Extremal im Vergleich zu anderen  
Bahnen

$$q(t) + \varepsilon \underline{h}(t)$$

mit  $\underline{h}(t_1) = \underline{h}(t_2) = 0$

Daraus folgt notwendig (mit dem obigen Theorem  
 $F = L$ )

$$n = 1$$

$$m = f, \quad \Omega = [t_1, t_2]$$

$\delta S[q] = 0$       Hamiltonsches Prinzip

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, f}$$

- Hamiltonsches Prinzip „scheinbar nicht  
kausal, sondern teleologisch“ (SOMMERFELD).  
„durch die Zukunft festgelegt“ ?!
- letztendlich ist das H. Prinzip  
ein theoretisches Hilfskonzept,  
um die „richtigen“ Bewegungsgleichungen  
zu bekommen.

Nicht-Eindeutigkeit von  $L$  Eichtransformationen

Satz: Zwei Lagrange-Funktionen  $L$  und  $L'$

führen zu denselben E-L-Gleichungen  
(Lagrange II) genau dann, wenn sie sich  
um eine totale Ableitung einer Funktion  
 $M(q(t), t)$  unterscheiden.

$$L = L' + \left( \frac{d}{dt} M \right) \quad \text{„Eichtransformation“}$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( L' + \frac{d}{dt} M \right)$$

$$= S' + H(q(t_2), t_2) - H(q(t_1), t_1) // \delta$$

$$\delta S = \delta S'$$

Wir zeigen  $\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial}{\partial q_k} \right) \frac{d}{dt} H(q(t), t)$

// Euler-Abbildung  $\left[ \sum_l \frac{\partial H}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial H}{\partial t} \right]$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial q_k} - \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_l \frac{\partial H}{\partial q_l} \dot{q}_l - \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\sum_l \frac{\partial}{\partial q_l} \frac{\partial H}{\partial q_k} \dot{q}_l - \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_l \frac{\partial H}{\partial q_l} \dot{q}_l - \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial t}$$

$= 0$

Symmetrien und Noether-Theorem

$$q(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2$$

freies Teilchen in  $d=3$

$$h_s: q(t) \mapsto \underline{Q}(s,t) \equiv q(t) + s \underline{e}_1$$

$$= (x(t) + s, y(t), z(t))$$

„Translation in x-Richtung“

Abl. nach der Zeit  $t$

$$\frac{d}{ds} L(\underline{Q}(s,t), \dot{\underline{Q}}(s,t), t) = \frac{d}{ds} \frac{1}{2} m \dot{\underline{Q}}^2(s,t) = 0$$

Die Lagrange-Funktion ist invariant unter der Transformation  $h_s$

$\Rightarrow$  wir erhalten dieselben Bewegungsgleichungen

$$m \ddot{q} = 0$$

$$m \underline{\ddot{Q}} = 0$$

Satz (Theorem von Emmy Noether)

Die Wirkung  $S[q]$  eines mech. Systems mit Lagrange-Fkt  $L$  sei unter der Transformation

$$h_s: q(t) \rightarrow \underline{Q}(s,t), \quad h_{s=0} = \text{id}$$

invariant, d.h. die Wirkung habe die

kontinuierliche Symmetrie,  $S[q] = S[\underline{Q}]$ .

Dann gilt für die Lösungskurve  $q(t)$

(Lagrange  $\Pi$ ):

$$I[q, \dot{q}] \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{ds} Q(s, t) \Big|_{s=0}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} I[q, \dot{q}] = 0, \text{ d.h.}$$

die Größe  $I[q, \dot{q}]$  ist eine Erhaltungsgröße.

Beweis:  $S$  invariant unter  $h_S$

$$0 = \frac{d}{ds} S[Q(s, t)] \Big|_{s=0} = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{ds} L(Q(s, t), \dot{Q}(s, t), t) \Big|_{s=0}$$

P.I.

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \frac{d}{ds} Q(s, t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{ds} \dot{Q}(s, t) \right] \Big|_{s=0}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \underbrace{\left[ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right]}_{=0 \text{ (E-L)}} \frac{d}{ds} Q(s, t) \right) \Big|_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{ds} Q(s, t) \Big|_{s=0} \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{ds} Q(s, t) \Big|_{t_1}^{t_2}$$



$$A(t_2) - A(t_1)$$

$\Rightarrow$  jetzt mit  $t_2 \rightarrow t_1$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{ds} Q(s, t) \right]_{s=0} = 0$$

A)  $N=1$  Teilchen, Translationsinvarianz

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{\underline{x}}^2 - V(\underline{x})$$

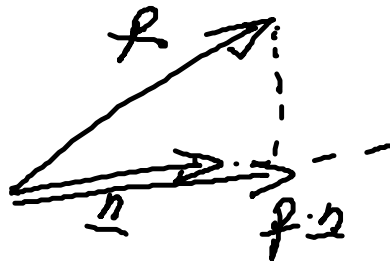
$$q(t) = \underline{x}(t) \xrightarrow{h_s} Q(s, t) = \underline{x}(t) + s \underline{\hat{n}}$$

$\underline{\hat{n}}$ : Richtung, in der  $V(\underline{x})$  sich nicht ändert.

$$I[q, \dot{q}] = \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{x}}} \frac{d}{ds} Q(s, t) \Big|_{s=0} = \frac{m \dot{\underline{x}}}{\underline{p}} \cdot \underline{\hat{n}} = \underline{p} \cdot \underline{\hat{n}} =$$

die Komponente des Impulses

$\underline{p}$  in  $\underline{\hat{n}}$ -Richtung



$N=1$  Teilchen, Rotationsinvarianz in  $d=3$

Lagrange - Fhkt

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{\underline{x}}^2 - V(\rho, z)$$
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Invariant unter Rotationen um die z-Achse,  
z.B. um den Winkel  $\varphi$

$$\underline{q}(t) = \underline{x}(t) \rightarrow \underline{Q}(\varphi, t) = R_z(\varphi) \underline{x}(t)$$

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow I[\underline{q}, \dot{\underline{q}}] = \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{q}}} \frac{d}{d\varphi} \underline{Q}(\varphi, t) \Big|_{\varphi=0}$$

$$= \underbrace{m \dot{\underline{x}}}_{\underline{p}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\underline{x}}_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \underline{p} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= p_x y - p_y x = -L_z$$

$$\underline{L} = \underline{x} \times \underline{p} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

⇒ Drehimpuls in  $z$ -Richtung bleibt konstant!

Falls  $V = V(|\underline{x}|)$ , dann folgt  
Rotationssymmetrie ⇒  
Drehimpulserhaltung (für alle Komponenten).

Das d' Alembertsche Prinzip

„Prinzip der virtuellen Verschiebungen“

Lagrangefunktion  $L = \frac{1}{2} m \dot{\underline{x}}^2 - V(\underline{x})$  und

holonome NB  $g(\underline{x}) = 0$

Betrachte Kurve  $\underline{x}(t)$  und kleine

Variationen  $\underline{x}(t) + \varepsilon \underline{h}(t)$

$\underline{h}(t)$  in Tangentialebene von der Fläche  $g(\underline{x}) = 0$

Dann gilt:  $\underline{x}(t)$  ist Extrempunkt der

Wirkung  $\int \delta$  bzgl. Variationen

$\underline{x}(t) \rightarrow \underline{x}(t) + \varepsilon \underline{h}(t)$ ,  $\underline{h}(t) = 0$

am Anfang/Endpunkt

⇔ für alle  $\underline{h}(t)$  gilt

$$\underline{Z} = m \underline{\ddot{x}} + \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} \perp \underline{h}$$

"Zwangskraft  $\underline{Z}$  steht senkrecht auf  
den virtuellen Verschiebungen".