29.10.08

29.10.08

$$\underline{Z} = m\underline{\ddot{x}} + \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} \perp \underline{h}$$

$$\delta S[\underline{x}] = \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} dt\, L\left(\underline{x}+\varepsilon\underline{h}, \dot{\underline{x}}+\varepsilon\dot{\underline{h}}\right)\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial \underline{x}}\underline{h} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{x}}}\dot{\underline{h}}\right)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial\underline{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\underline{x}}}\right)}_{\underbrace{-\frac{\partial V}{\partial \underline{x}} - m\ddot{\underline{x}}}_{0}} \underline{h} + \underbrace{RT\Big|}_{0}$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\underline{x}}^2 - V(\underline{x})$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} dt\; \underline{Z}\cdot\underline{h}$$

Zwangskraft $\perp$ virtuellen Verrückungen $\underline{h}$.

Anwendung: Statik

Verallgemeinerung von d'Alembert zu N Teilchen

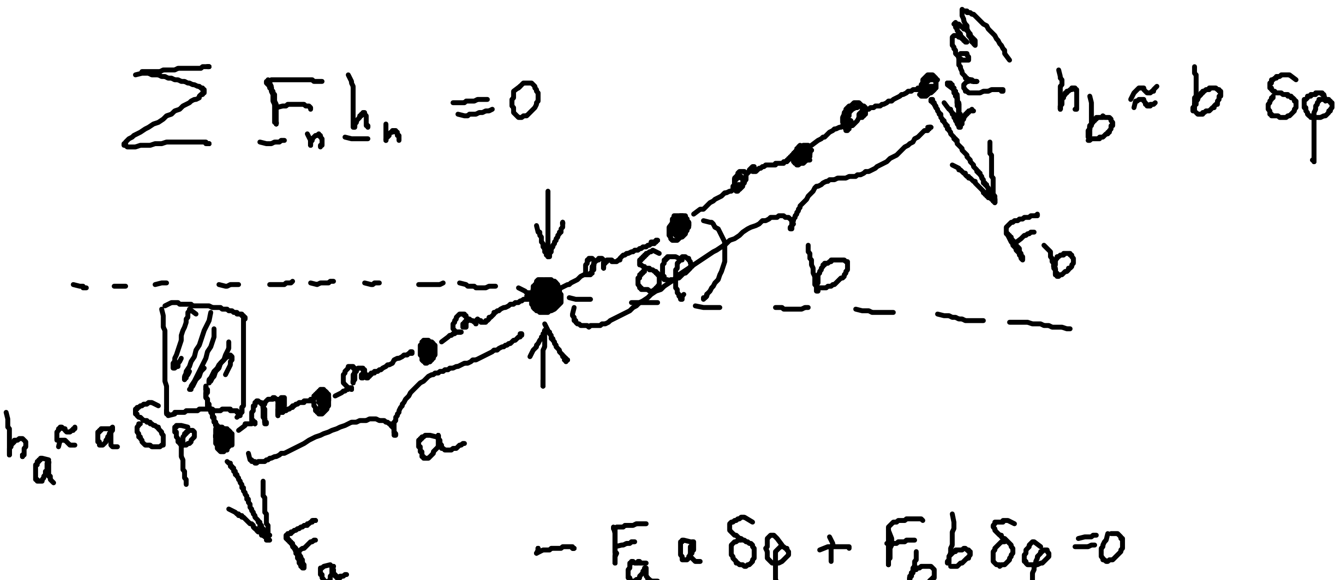
$$\underline{Z}_n \equiv m_n \ddot{\underline{x}}_n + \underline{F}_n$$

äußere Kräfte

<u>d'Alembert</u> :
$$\sum_{n=1}^{N} \left(m_n \ddot{\underline{x}}_n + \underline{F}_n \right) \cdot \underline{h}_n = 0$$

<u>Hebel</u> :
$$\dot{\underline{x}}_n = \ddot{\underline{x}}_n \equiv 0 \quad \text{(statisch)}$$

$$\sum \underline{F}_n \underline{h}_n = 0$$



$$-F_a\, a\, \delta\varphi + F_b\, b\, \delta\varphi = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{a F_a = b F_b} \quad \text{„Hebelgesetz"}$$

<u>Klassifikation der Randbedingungen</u>

<u>holonomen RB</u>

$$g_\alpha(x_1, \ldots, x_k) = 0$$

enthält die Zeit t nicht
„skleronom"
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$g_\alpha(x_1, \dots, x_k, t) = 0$ rheonom

enthält

$z^2 + x^2 + y^2 = f(t)$

keine Ableitungen $\dot{x}_i$

alles andere: nicht-holonom

z.B. Ungleichungen

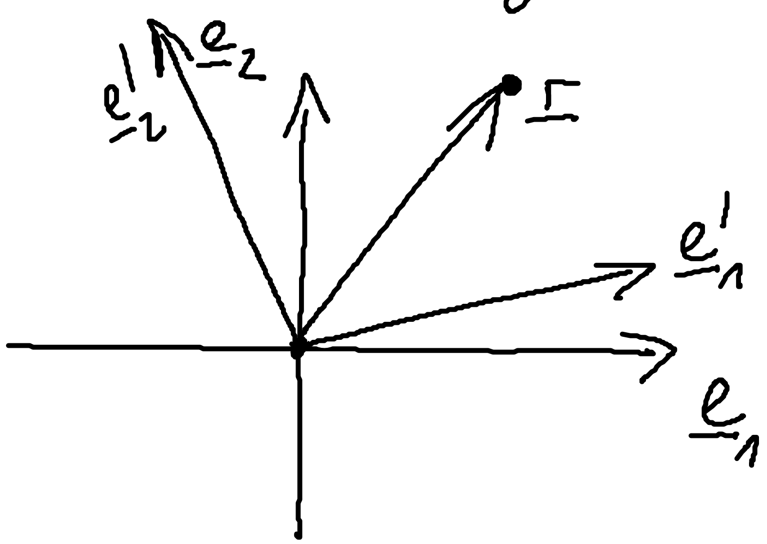
$$x^2 + y^2 \geq 5$$

III Der Starre Körper

Zwei Bezugssysteme

K : Inertialsystem

K' : beliebig, z.B. rotierend



K

$e_i \to \boxed{e_i' = R\, e_i}$, $\det R \neq 0$

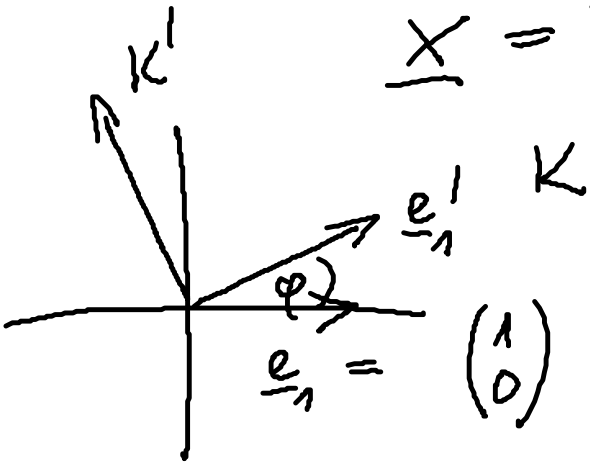
R: $d \times d$ Matrix, $(d=3)$

für $\mathbb{R}^d$

Punkt $\quad r = \sum_i x^i e_i = \sum x^{i'} e_i'$

$\Rightarrow$ Der Vektor der Komponenten von r in den jeweiligen Basen erfüllt

$$\underline{x} = R\, \underline{x}'$$



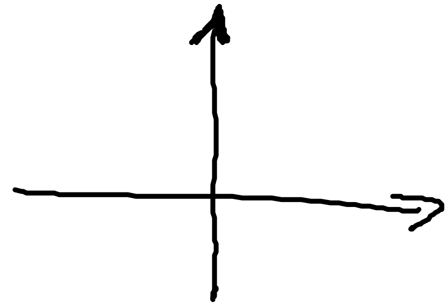
$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ +\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ im K- System

$e_1' = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ im K- System

$e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ im K'- System .

Zeitabhängiger Basiswechsel



K

$$R = R(t)$$

Geschwindigkeit $\quad \dot{\underline{x}} = \frac{d}{dt} R \underline{x}' = \dot{R} \underline{x}' + R \dot{\underline{x}}'$

$$\boxed{\underline{x}' = R^{-1} \underline{x}}$$

$$= \underbrace{\dot{R} R^{-1}}_{\Omega(t)} \underline{x} + R \dot{\underline{x}}'$$

$$= \Omega(t) \underline{x} + R \dot{\underline{x}}'$$

$\Omega(t)$ Matrix bzgl. K

$$\underline{y} = \Omega \underline{x} \quad \text{in } K$$

$$\underline{y}' = \Omega' \underline{x}' \quad \text{in } K'$$

$$R^{-1} \underline{y} = \Omega' R^{-1} \underline{x}$$

$$\underline{y} = \underbrace{R \Omega' R^{-1}}_{= \Omega} \underline{x}$$

Also $\quad \boxed{\Omega' = R^{-1} \Omega R = R^{-1} \dot{R} R^{-1} R = R^{-1} \dot{R}}$

$$\underline{\dot{x}} = \Omega\underline{x} + R\underline{\dot{x}}' = R\Omega'\underbrace{R^{-1}\underline{x}}_{\underline{x}'} + R\underline{\dot{x}}'$$

$$= \underbrace{R\left(\Omega'\underline{x}' + \underline{\dot{x}}'\right)}_{\text{in } K'}$$

Beschleunigung

$$\underline{\ddot{x}} = \frac{d}{dt}\left(R\underline{\dot{x}}' + \Omega\underline{x}\right)$$

$$= \underbrace{\dot{R}\underline{\dot{x}}'}_{\Omega R\underline{\dot{x}}'} + R\underline{\ddot{x}}' + \dot{\Omega}\underline{x} + \Omega\underline{\dot{x}}$$

$\Omega = \dot{R}R^{-1}$

$$= \Omega R\underline{\dot{x}}' + R\underline{\ddot{x}}' + \dot{\Omega}R\underline{x}' + \Omega\left(\Omega\underline{x} + R\underline{\dot{x}}'\right)$$

$$= R\underbrace{R^{-1}\Omega R}_{\Omega'}\underline{\dot{x}}' + R\underline{\ddot{x}}' + R\underline{R^{-1}\dot{\Omega}R}\,\underline{x}' +$$

$$+ R R^{-1}\Omega R R^{-1}\left(\Omega R R^{-1}\underline{x} + R\underline{\dot{x}}'\right)$$

$$= R\Omega'\underline{\dot{x}}' + R\underline{\ddot{x}}' + R\left(R^{-1}\dot{\Omega}R\right)\underline{x}' + R\Omega'\Omega'\underline{x}'$$

$$+ R\Omega'\underline{\dot{x}}'$$

$= \dot{\Omega}'$: denn für R^{-1} gilt: $RR^{-1} = 1 \quad / \, d/dt$

$\Omega' = R^{-1}\Omega R$

$$\dot{R}R^{-1} + R\frac{d}{dt}R^{-1} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}R^{-1} = -R^{-1}\dot{R}R^{-1}$$

$\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{r(t)} = -\frac{1}{r^2}\dot{r}\right)$; $\dot{\Omega}' = R^{-1}\dot{\Omega}R$

$$\Rightarrow \ddot{\underline{x}} = R\Big(\underbrace{2\Omega'\dot{\underline{x}}'}_{\text{„Coriolis-artig"}} + \underbrace{\ddot{\underline{x}}'}_{\text{normaler Newton}} + \underbrace{\dot{\Omega}'\underline{x}'}_{?} + \underbrace{\Omega'\Omega'\underline{x}'}_{\text{Zentrifugal-artig}}\Big)$$

N. Gleichungen in K: $m\ddot{\underline{x}} = \underline{F} = R\,\underline{F}'$

Komponenten der Kraft in K?

$$\Rightarrow \underline{F}' = R^{-1} m \underline{\ddot{x}}$$

$$\boxed{m\underline{\ddot{x}}' = \underbrace{\underline{F}'}_{\text{„Newton" im Inertialsystem}} \underbrace{- 2m\Omega'\underline{\dot{x}}' - m\dot{\Omega}'x' - m\Omega'\Omega'\underline{x}'}_{\text{„Scheinkräfte"}}}$$

<u>Rotationen:</u> Spezialfall $R \in SO(3)$ (Rotationen)

„Drehmatrix"

<u>Satz:</u> Für 3-d Rotationen $R \in SO(3)$ ist die Matrix $\Omega(t) \equiv \dot{R}(t) R^{-1}(t)$ schiefsymmetrisch, und es gilt

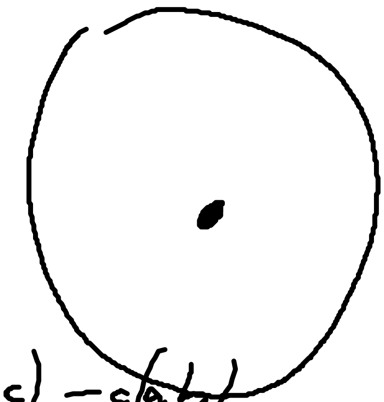
$$\Omega(t)\underline{x} = \underline{\omega}(t) \times \underline{x}$$

Explizit gilt

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

Beweis als Aufgabe:

$$\Rightarrow m\ddot{\underline{x}}' = \underline{F}' - \underbrace{2m\,\underline{\omega}'\times\dot{\underline{x}}'}_{\text{Coriolis-Kraft}} - m\,\dot{\underline{\omega}}'\times\underline{x}' - \underbrace{m\,\underline{\omega}'\times(\underline{\omega}'\times\underline{x}')}_{\text{Zentrifugalkraft}}$$

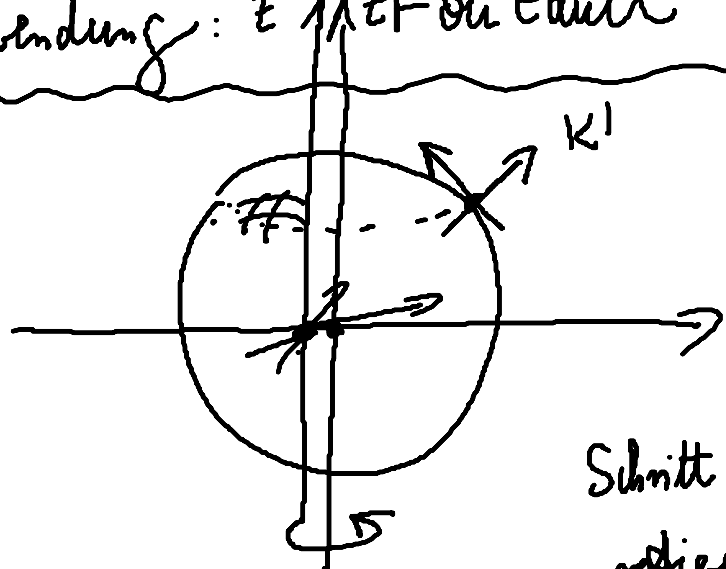


Regel: bac-cab Regel

$$\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) = \underline{b}(\underline{a}\,\underline{c}) - \underline{c}(\underline{a}\,\underline{b}).$$

Anmerkung: $\underline{\omega} = R\,\underline{\omega}'$ für die Winkelgeschwindigkeit

Anwendung: Foucault-Pendel



K

Schritt 2: $K'' \rightarrow K'$

rotiere um die y''-Achse

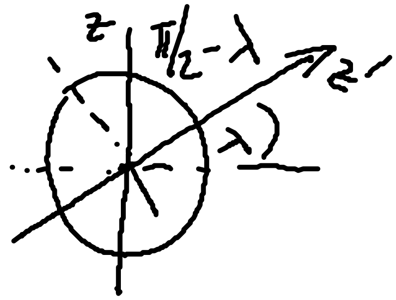
$$\underline{\omega} = \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Schritt 1: $K \rightarrow K''$:

Äquatorebene x''-y'' um $z (= z'')$ rotiert

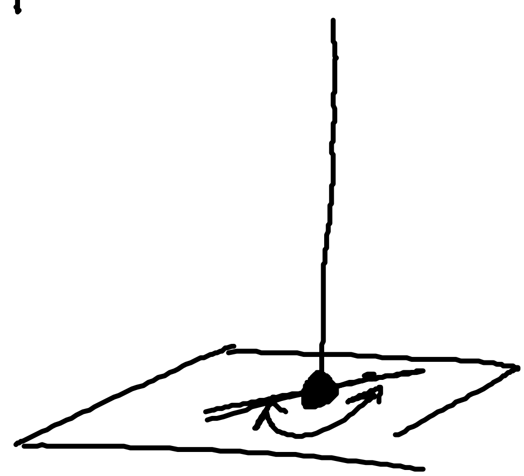
$$\underline{\omega}'' = \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

so dass die neue z'-Achse $\perp$ durch das Labor geht.



$$\underline{\omega}' = \Omega \begin{pmatrix} \cos\lambda \\ 0 \\ \sin\lambda \end{pmatrix}$$

Ohne Rotation der Erde



In K':
$$\ddot{x}' + \omega^2 x' = 0$$
$$\ddot{y}' + \omega^2 y' = 0$$
harmonischer Oszillator

ω: Winkelfreq. der Schwingungen des Pendels.

Mit Rotation:
$$\ddot{\underline{x}}' + \omega^2 \underline{x}' = -2\, \underline{\omega}' \times \dot{\underline{x}}'$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x}' + \omega^2 x' = 2 \Omega \sin\lambda\, \dot{y}'$$
$$\ddot{y}' + \omega^2 y' = -2 \Omega \sin\lambda\, \dot{x}'$$

$$\Omega \sin\lambda \ll \omega \Rightarrow x' + i y' = e^{-i(\Omega \sin\lambda)t} \left(x_0'(t) + i\, y_0'(t) \right)$$

mit (x_0, y_0) erfüllt die $\Omega = 0$-Gleichung.

MATHEMATICA!