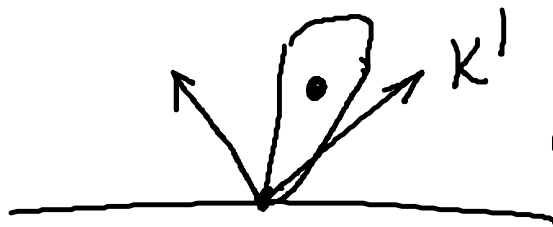


11.11.08

Trägheitstensor

$$\Theta'_{\alpha\beta}(\{x'_i\}) \equiv \sum_{i=1}^N m_i \left(\delta_{\alpha\beta} (x'_i)^2 - x'_{i\alpha} x'_{i\beta} \right)$$



beliebiges KO-System

Satz von Steiner:

$$\Theta'_{\alpha\beta}(\{0 \underline{x}'_i + \underline{a}\}) = M \left(\underline{a}^2 \delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta \right)$$

$O \in SO(3)$ orthog. Matrix

$\underline{a} \in \mathbb{R}^3$

$M \equiv \sum_{i=1}^N m_i$ Gesamtmasse

$$+ \underbrace{\left(O \Theta'(\{ \underline{x}'_i \}) O^T \right)}_{\text{Produkt von 3 Matrizen}}_{\alpha\beta}$$

Häufig benutzt mit $O = E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

Körperfestes KO-System K' .

Beweis:

$$\begin{aligned} & \sum_i m_i \left(\delta_{\alpha\beta} (0 \underline{x}'_i + \underline{a})^2 - (0 \underline{x}'_i + \underline{a})_\alpha (0 \underline{x}'_i + \underline{a})_\beta \right) \\ &= \sum_i m_i \left(\delta_{\alpha\beta} ((0 \underline{x}'_i)^2 + \underline{a}^2) - (0 \underline{x}'_i)_\alpha (0 \underline{x}'_i)_\beta - \underline{a}_\alpha \underline{a}_\beta \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_i m_i \underline{x}'_i = 0} \rightarrow \text{gemischte Terme} = 0$$

$$= \sum_i m_i \left(\delta_{\alpha\beta} a_{\alpha}^2 - a_{\alpha} a_{\beta} \right) + \sum_i m_i \left(\delta_{\alpha\beta} (Ox_i')^2 - (Ox_i')_{\alpha} (Ox_i')_{\beta} \right)$$

$$\cdot (Ox_i')_{\alpha} (Ox_i')_{\beta} = \sum_{d'} O_{dd'} x'_{id'} \sum_{\beta'} O_{\beta\beta'} x'_{i\beta'}$$

$$= \sum_{d'/\beta'} O_{dd'} x'_{id'} O_{\beta\beta'} x'_{i\beta'}$$

$$= \sum_{d'/\beta'} O_{dd'} \begin{pmatrix} x'_{id'} & x'_{i\beta'} \end{pmatrix} O_{\beta\beta'}^T$$

2. Anteil: $\delta_{\alpha\beta} (Ox_i')^2 = x_i'^2 \delta_{\alpha\beta} = x_i'^2 (O O^T)_{\alpha\beta}$

$x_i'^2$ ist skalare Größe.

Γ Berechnung: Doppel summe

$$\left(\sum_i a_i \right) \left(\sum_j b_{ji} \right) = \sum_{i,j} a_i \cdot b_{ji}$$

Beispiel:

θ' für Kugel



Der schwere symm. Kreisel

$$L = \frac{1}{2} \left((\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) \theta_1' + (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \theta_3' \right) - Mg_s \cos \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{„} \varphi \text{ zyklisch“}$$

$$\Rightarrow \text{EL II} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0$$

$$\Rightarrow \left\| \begin{aligned} L_z &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const} = \theta_1' \dot{\varphi} \sin^2 \theta + \theta_3' (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \cdot \cos \theta \\ \text{Ebenso} \left\| L_z' &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \text{const} = \theta_3' (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \end{aligned} \right.$$

denn ψ ist auch zykl.

|| Nach $\dot{\varphi}$ (Winkelgeschw. der Präzession) auflösen

$$L_z = \theta_1' \dot{\varphi} \sin^2 \theta + L_z' \cos \theta$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{L_z - L_z' \cos \theta}{\theta_1' \sin^2 \theta} \cdot$$

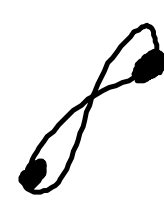
$$E = T + V = \frac{\theta_1'}{2} \dot{\theta}^2 + U_{\text{eff}}(\theta) = \text{const}$$

$$U_{\text{eff}}(\theta) \equiv \frac{(L_z - L_z' \cos \theta)^2}{2\theta_1' \sin^2 \theta} + \frac{L_z'^2}{2\theta_3'} + M g s \cos \theta$$

Wir haben das Problem auf eine

Bewegungsgleichung in 1 Dimension reduziert:
1 Variable θ im Potential $U_{\text{eff}}(\theta)$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{\theta_1'} (E - U_{\text{eff}}(\theta))}$$

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{\dots}} = dt$$


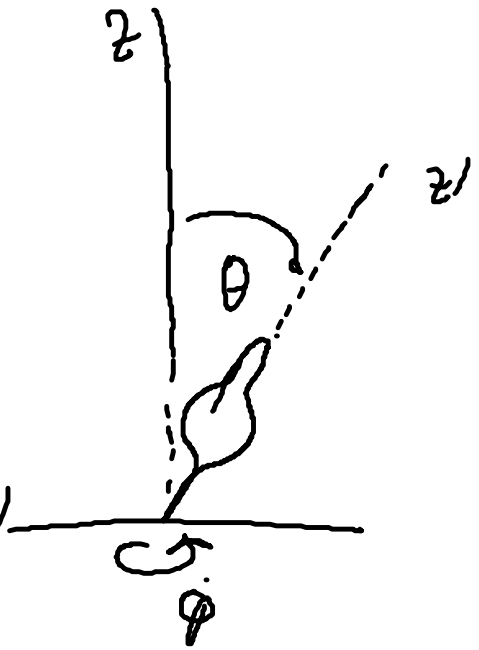
Über: dieses Integral.

Näherung: kleine Nutationsamplituden

$$\theta(t=0) = \theta_0$$

$$\dot{\theta}(t=0) = \dot{\varphi}(t=0) = 0$$

keine anfängliche Nutation (θ)
und Präzession (φ)



$$L_z = \theta_3' \dot{\varphi} \cos \theta_0; \quad L_z' = \theta_3' \dot{\varphi}$$

$$E = \frac{(L_z')^2}{2\theta_3'} + Mgs \cos \theta_0.$$

In der Bew.-gl.: gesucht $\theta(t)$

$$\frac{\theta_1'}{2} \dot{\theta}^2 = E - U_{eff}(\theta) = Mgs (\cos \theta_0 - \cos \theta) - \frac{\theta_3'^2 \dot{\varphi}^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta)^2}{2\theta_1' \sin^2 \theta}$$

Neue Variable: $\xi = \cos \theta_0 - \cos \theta$ | $\cdot \frac{d}{dt}$
 $\dot{\xi} = \dot{\theta} \sin \theta$

$$\Rightarrow \dot{\xi} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{\theta_1'}} \sqrt{(2Mgs) \xi - \left(\frac{\theta_3'^2 \dot{\varphi}^2}{\theta_1' \sin^2 \theta} \right) \xi^2}$$

Entwickeln um θ_0

$$\sin \theta = \sin \theta_0 + \underbrace{(\theta - \theta_0)}_{\text{klein}} \cos \theta_0$$

$$\approx \sin \theta_0$$

Damit

$$\frac{\sin \theta_0}{\sqrt{\theta_1'}} dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{(2Mgs)\varphi - \left(\frac{\theta_3'^2 \dot{\varphi}^2}{\theta_1' \sin^2 \theta_0}\right) \varphi^2}}$$

$$\varphi(t) = \cos \theta_0 - \cos \theta(t) = \frac{Mgs \theta_1' \sin^2 \theta_0}{\theta_3'^2 \dot{\varphi}^2} \left[1 - \cos \left(\frac{\theta_3' \dot{\varphi}}{\theta_1'} t \right) \right]$$

- Nutation $\cos \theta(t)$ oszilliert mit der (hohen) Frequenz $\frac{\theta_3' \dot{\varphi}}{\theta_1'}$ Dreh-Frequenz.

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{L_z - L_z' \cos \theta}{\theta_1' \sin^2 \theta} \approx \frac{Mgs}{\theta_3' \dot{\varphi}} \left[1 - \cos \left(\frac{\theta_3' \dot{\varphi}}{\theta_1'} t \right) \right]$$

$\uparrow \approx \sin^2 \theta_0$

- Präzessionsfrequenz $\dot{\varphi}$ ändert sich periodisch mit der Frequenz $\frac{\theta_3' \dot{\varphi}}{\theta_1'}$.

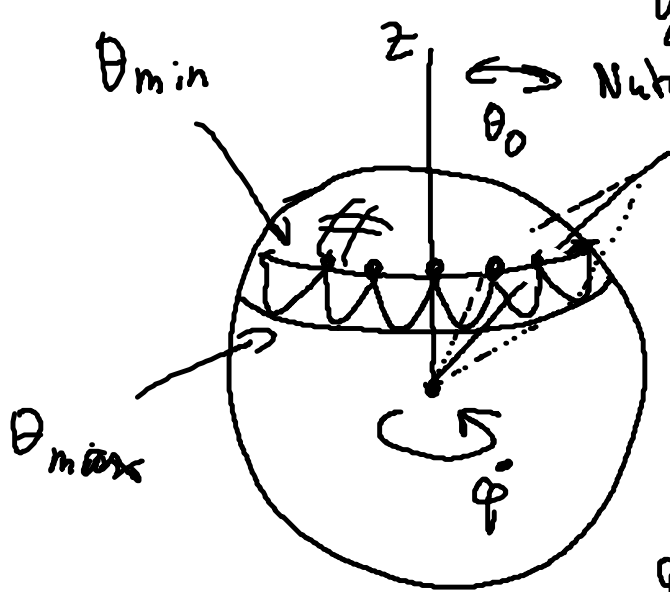
Zeitlicher Mittelwert

$$\langle \dot{\varphi} \rangle = \frac{Mgs}{\theta_3' \dot{\varphi}}$$

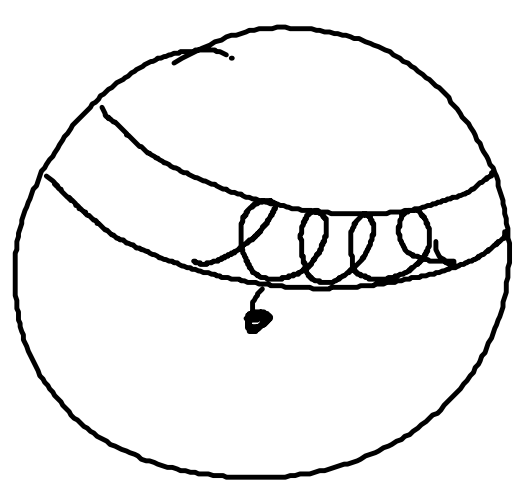
- Präzession ist nicht gleichförmig, sondern mal langsamer und mal schneller
- Die Figurenachsen z' wippt während der Präzessionsbewegung ein wenig auf und ab (NUTATION), und zwar mit der hohen Nutationsfrequenz $\frac{\dot{\theta}_3'}{\dot{\theta}_1'}$

und kleiner Amplitude

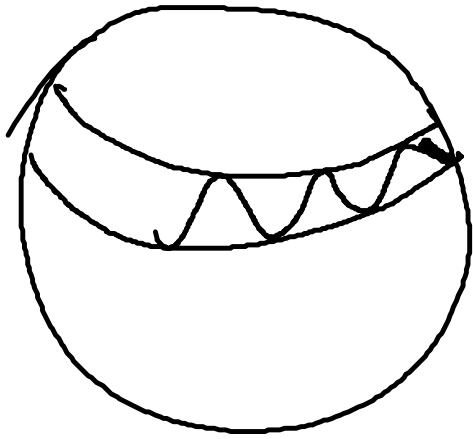
$$\frac{Mg s \theta_3' \sin^2 \theta_0}{\theta_3'^2 \dot{\varphi}^2}$$



$\dot{\varphi}$ immer vorwärts, manchmal $= 0$



$\dot{\varphi}$ manchmal rückwärts



Auch erhältlich aus der Diskussion
des effektiven Potentials $U_{\text{eff}}(\theta)$ ↓

Kapitel IV: Hamilton-Formalismus

Def: generalisierter Impuls

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad ; \quad i=1, \dots, f$$

zu q_i konjugierter Impuls.

Beispiel: a) $L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ (kart. Koord.)

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} = p$$

b) $L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}$$

$$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi}$$

Kepler: P_φ konst. \Rightarrow Flächensatz

Hamilton-Mechanik: Formulierung mittels q_i (verallg. Ko) und p_i (verallg. Impulse) statt q_i und \dot{q}_i wie bei Lagrange.

Wir wollen das \dot{q}_i durch das $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ ersetzen.

4.1. Legendre-Transformation

- wollen Funktion $f(x)$ durch ihre Ableitung $p = f'(x)$ ausdrücken, ohne dass Information verloren geht \Rightarrow

Beispiel: $y = f(x) = x^2; \quad p = f'(x) = 2x$

$$f(x) = \frac{p^2}{4} \equiv g(p)$$

Daraus $f(x)$ rekonstruieren:

$$\Rightarrow p = 2\sqrt{g(p)} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = 2\sqrt{f(x)} \Rightarrow \frac{df}{2\sqrt{f}} = dx$$

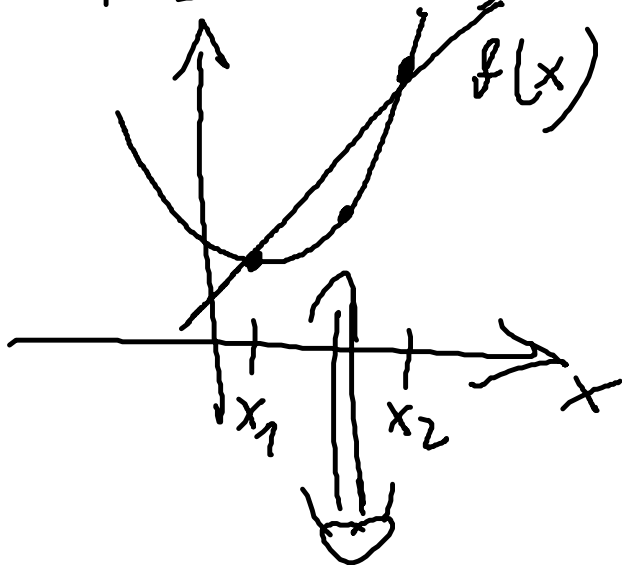
$$\sqrt{f} = x + c \Rightarrow f(x) = (x + c)^2$$

Def: Eine Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

heißt konvex, wenn $\forall x_1, x_2 \in D$
und λ mit $0 < \lambda < 1$ gilt

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

f heißt konkav, wenn $-f$ konvex ist



Punkte von f
liegen unterhalb
der Geraden.

Später auch wichtig in der

Thermodynamik:

Die Entropie $S(X)$ als Funktion
ihrer „natürlichen“ Variablen $X = (U, V, N)$

U : innere Energie

V : Volumen

N : Teilchenzahl

ist eine konkave Funktion.