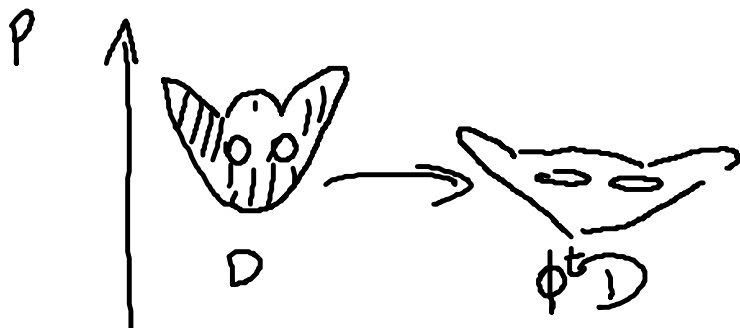
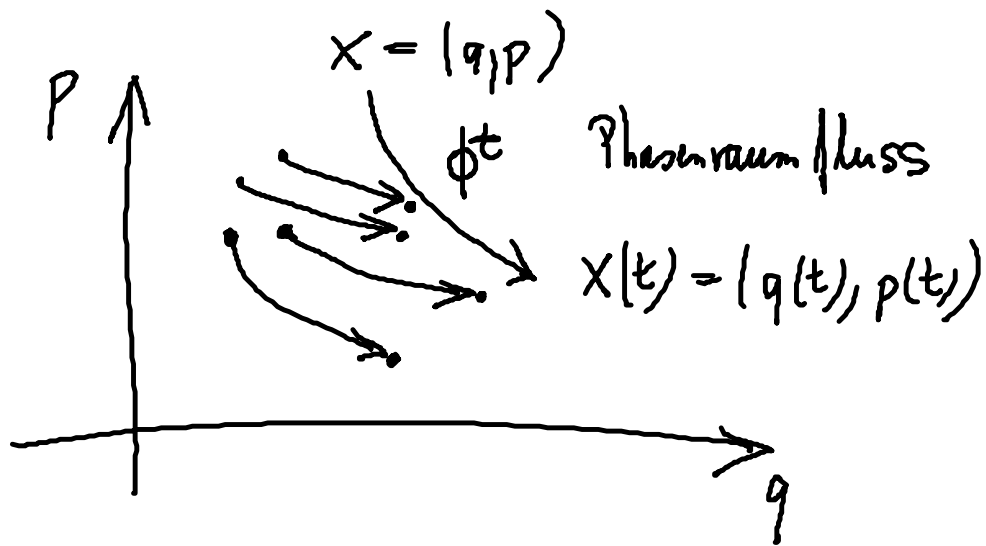


18.11.08

18.11.08



$\xrightarrow{q}$

Satz von Liouville :  $\text{vol}(\phi^t D) = \text{vol}(D)$

bei  $\phi^t: X(0) \rightarrow X(t)$ .

bei  $\dot{\underline{X}} = \underline{v}(\underline{X})$ ,  $\underline{v} = \begin{pmatrix} \partial H / \partial p \\ -\partial H / \partial q \end{pmatrix}$

$\underline{X} = (q, p) = (q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n)$ .

Etwas allgemeiner  $\dot{\underline{X}} = f(\underline{X})$  mit  $\text{div} f = 0$

$$\begin{aligned} \text{(Hier } \text{div } \underline{v} &= \begin{pmatrix} \partial / \partial q & \partial / \partial p \end{pmatrix} \underline{v} = \\ &= \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} = 0 \end{aligned}$$

Bew: Zeitentwicklung für kurze Zeiten  $t$

$$\begin{aligned} \dot{\underline{X}} = f(\underline{X}) &\rightarrow \underline{X}(t) = \int_0^t dt' f(\underline{X}(t')) + \underline{X}(0) \\ &= \underline{X}(0) + f(\underline{X}(0))t + \\ &\quad + \dots O(t^2) \end{aligned}$$

1)  $v(t) = \int d\underline{X}$

$\phi^t D$ Transformationsformel  
mits Det.

$$= \int_D \det \frac{\partial \phi^t X}{\partial X} dX$$

des

 $D$ 

Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial X(t)}{\partial X}$$

$$\begin{vmatrix} \partial x_1(t) / \partial x_1 & \partial x_2(t) / \partial x_1 \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial \phi^t X}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \underline{X} + f(\underline{X}) \cdot t + o(t^2) \right)$$

$$= E + t \frac{\partial f}{\partial X} + \dots, \quad t \rightarrow 0.$$

$$\begin{pmatrix} \partial x / \partial x & \partial x / \partial y & \partial x / \partial z \\ \partial y / \partial x & \partial y / \partial y & \partial y / \partial z \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$2) \det(E + tA) = 1 + t \operatorname{Tr} A + O(t^2) \quad t \rightarrow 0$$

$$\operatorname{Tr} A = \sum_i A_{ii}$$

"Tr Trace"

Beweis: Auswertung von

$$\begin{pmatrix} 1+tA_{11} & tA_{12} \\ tA_{21} & 1+tA_{22} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$3) \det \frac{\partial \phi^t X}{\partial X} = \det \left( E + \frac{\partial f}{\partial X} t + O(t^2) \right)$$

$$= 1 + t \operatorname{Tr} \frac{\partial f}{\partial X} + O(t^2)$$

$$= 1 + t \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + O(t^2)$$

$$= 1 + t \operatorname{div} \underline{f} + O(t^2)$$

$$= 1 + t \cdot 0 + O(t^2), \quad t \rightarrow 0$$

(wegen  $\operatorname{div} \underline{f} = 0$ ), deshalb

$$v(t) = \int_D \det \frac{\partial \phi^t X}{\partial X} dX$$

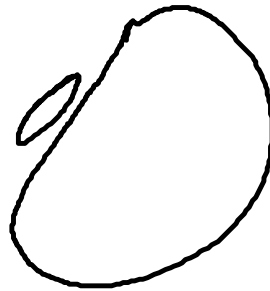
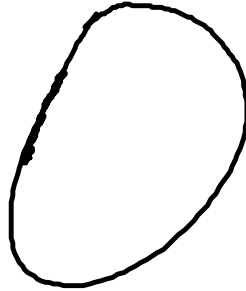
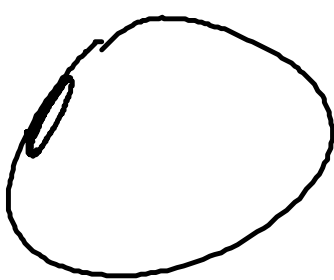
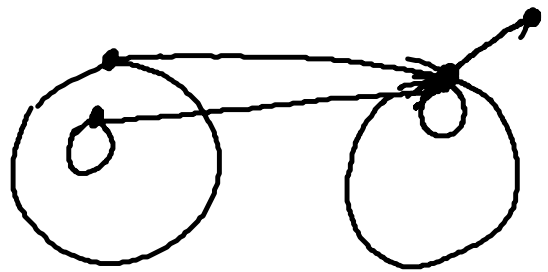
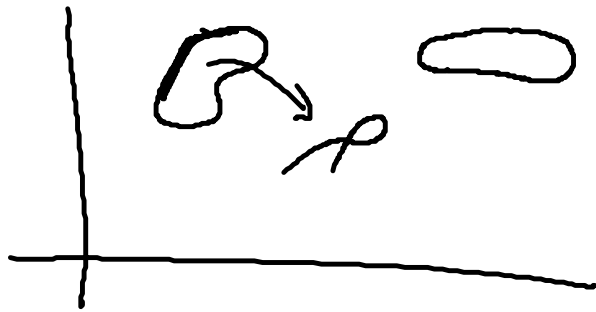
$$\left. \frac{d}{dt} v(t) \right|_{t=0} = \int_{D(0)} \operatorname{div} \underline{f} dX = 0$$

Entsprechendes für alle anderen Zeiten  $t_0 > 0$

$$\left. \frac{d}{dt} v(t) \right|_{t_0} = 0, \text{ denn } \operatorname{div} \underline{f} = 0 \text{ (stets).}$$

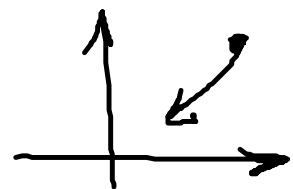
=> Das Volumen des  
 festes  $D(t)$  ändert sich zeitlich überhaupt  
 nicht.

Hier  $v(x) = \begin{pmatrix} \partial H / \partial p \\ -\partial H / \partial q \end{pmatrix}$

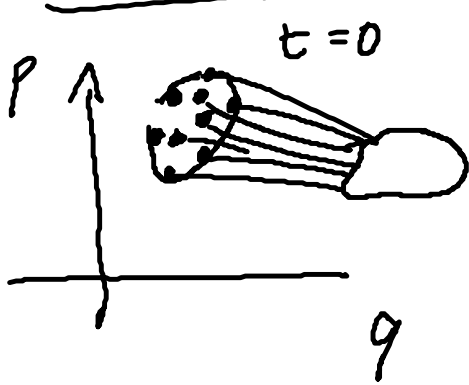


Fest  $N \gg 1$  mechanische Systeme,  
 alle gleichzeitig

Als Punkte im Phasenraum  $\Gamma$



lines einzelnes Systems



"Ensemble" von  $N$  Teilchen.

Phasendichte  $\rho$  : Betrachte Anzahl  $dN$  von Punkten im Volumenelement  $dV$ , Jeder Punkt entspricht einem Mitglied des Ensembles.



$$dN = 4$$

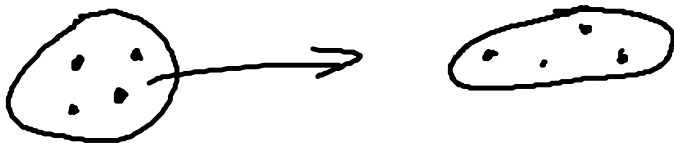
in der Umgebung eines Phasenraumpunktes

$\underline{x}$

$$\rho(\underline{x}) dV = \text{Anzahl der Mitglieder in Volumen } dV$$

Führt Zeitentwicklung.

$$\rho(\underline{x}) = \frac{dN}{dV}$$



$$\begin{aligned} dN &= \text{const} \\ dV &= \text{const} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\rho(q, p, t) = \text{const}$$

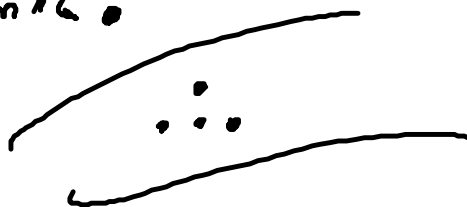
$$\frac{d}{dt} \rho(q, p, t) = 0$$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt} \rho(q, p, t) = \frac{\partial \rho}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \rho}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \\
&= \frac{\partial \rho}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \\
&= \frac{\partial}{\partial q} \left( \rho \frac{\partial H}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial p} \left( \rho \frac{\partial H}{\partial q} \right) - \underbrace{\rho \left[ \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} \right]}_{\text{div } v = 0} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \\
&= \text{div}(\rho v) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.
\end{aligned}$$

$$\dot{z} \equiv \rho v = \rho \begin{pmatrix} \partial H / \partial p \\ -\partial H / \partial q \end{pmatrix} \quad \text{Phasenraum-} \\
\text{stromdichte}$$

$$\text{div}(\rho v) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

Vgl. Elektrodynamik.



Sei  $g$  eine Funktion im Phasenraum  $\Gamma$

Zeitentw:  $\frac{d}{dt} g = \frac{\partial g}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial g}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial g}{\partial t}$

$$= \frac{\partial g}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial g}{\partial t}$$

$$= \{H, g\} + \frac{\partial g}{\partial t} \quad (*)$$

Poisson-Klammer:

$$\{f, g\} \equiv \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p}$$

(Analog in der QM)

Eigenschaften der Poisson-Klammer

$$\{f, g\} = -\{g, f\}$$

$$\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha \{f, h\} + \beta \{g, h\}$$

$$\{d, f\} = 0$$

$$\{fg, h\} = f \{g, h\} + \{f, h\} g$$

$$0 = \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}$$

Jacobi-Identität.

gelten auch für Kommutator  $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$   
der QM oder



für das Kreuzprodukt.

## Lie-Algebra

Erhaltungsgrößen:

$$g \text{ Erhaltungsgröße} \\ \Leftrightarrow \{H, g\} + \frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

Beispiel:  $g = H = H(p, q) \Rightarrow \{H, H\} = 0$

Poissonisches Theorem:  $f, g$  Konstanten der Bewegung.  
 $\Rightarrow \{f, g\}$  ist Konstante der Bewegung.

Bew.:  $\frac{d}{dt} \{f, g\} = \{H, \{f, g\}\} =$   
 $= - \underbrace{\{f, \{g, H\}\}}_0 - \underbrace{\{g, \{H, f\}\}}_0 = 0.$

Kanonische Poisson-Klammern:

$q_k, p_k$

$$\Rightarrow \{q_k, p_l\} = \delta_{kl}$$

$$\{q_k, q_l\} = 0$$

$$\{p_k, p_l\} = 0$$

$\hat{=}$  kanon. Vertauschungsrelationen  
 der QK, z.B.  $[q, p] = i\hbar$   
 $\hbar = h/2\pi$ .

## Kanonische Transformationen

1) Punkttransformationen  $\underline{Q} = \underline{Q}(q, t)$

nur die Ortskoordinaten werden transformiert) z.B.

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \varphi \\
 y &= r \sin \varphi \\
 & \quad t_2
 \end{aligned}$$

Hamilt. Prinzip  $\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L = 0$

$\Rightarrow$  EL:  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ . in den  $q$ -Koordin.

Sei  $\underline{Q}(q, t)$  eine Punkt-Info. der  $f$  verallg. KQ.

$$L \rightarrow L'(\underline{Q}, \dot{\underline{Q}}, t) = L(q(\underline{Q}, t), \dot{q}(\underline{Q}, \dot{\underline{Q}}, t), t)$$

Dann gilt

$$\delta S[L] = 0 \iff \delta S[L'] = 0,$$

und die zugehörige EL-Gleichungen sind

## Forminvariant

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \iff \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}} - \frac{\partial L'}{\partial Q} = 0$$

Expressiver Gebrauch der Kettenregel:

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial q}{\partial Q} \quad \text{"Kürzen von Punkten"}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial Q} = \frac{\partial L}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial Q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial Q}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}} - \frac{\partial L'}{\partial Q} &= \underbrace{\left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right]}_0 \frac{\partial q}{\partial Q} \\ &\quad - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \underbrace{\left[ \frac{\partial \dot{q}}{\partial Q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial q}{\partial Q} \right]}_{\partial \dot{q} / \partial Q} = 0 \end{aligned}$$

Nicht verwechseln mit Eichtrafo

$$L(q, \dot{q}, t) \rightarrow L'(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} h(q, t)$$

# Variationsprinzip für das Hamiltonsche gl.

Satz: Aus dem Var-Prinzip

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt L_H(q, p, \dot{q}, t) = 0$$

$$\begin{aligned} \delta q(t_1) = \delta q(t_2) &= 0 \\ \delta p(t_1) = \delta p(t_2) &= 0 \end{aligned}$$

$$L_H \equiv p \dot{q} - H(q, p, t)$$

folgen die Hamiltonschen Gleichungen.

(REBHAN).

Beweis: Anwendung unseres Theorems (...).

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_H}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L_H}{\partial q} = 0; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L_H}{\partial \dot{p}} - \frac{\partial L_H}{\partial p} = 0$$

als notwendige Bedingung. Mit  $L_H = p \dot{q} - H$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} p = - \frac{\partial H}{\partial q}; \quad 0 = \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$