

19.11.

19.11.2008

$Q = Q(q, p, t)$ Punkttrafo

Nicht nur Orts-, sondern auch die Impulskoordinaten

transformieren.

Wir wollen jetzt innerhalb der Gesamtheit der p - und q -Koordinaten transformieren.

Hamiltonsche Gleichungen

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

Definition: Umkehrbare Transformation

$$Q = Q(q, p, t); \quad P = P(q, p, t),$$

welche die Hamiltonsche Form der Bewegungsgleichungen mit links zu den Q, P gehörigen (neuen)

Hamiltonfunktion $K(Q, P, t)$ invariant lassen

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q}$$

heißen kanonische Transformationen.

$$q = (q_1, \dots, q_f)$$

$$p = (p_1, \dots, p_f)$$

$$Q = (Q_1, \dots, Q_f)$$

$$P = (P_1, \dots, P_f).$$

f : # Freiheitsgrade

Satz: Eine Transformation

$$q, p, \mathcal{H}(q, p, t) \longrightarrow Q, P, \mathcal{K}(Q, P, t)$$

ist kanonisch, wenn $\mathcal{Q}(q, p, t), \mathcal{P}(q, p, t)$
die erzeugende Gleichung

$$\underbrace{p\dot{q} - \mathcal{H}(q, p, t)}_{L_H(q, p, \dot{q}, t)} = \underbrace{P\dot{Q} - \mathcal{K}(Q, P, t)}_{L_K(Q, P, \dot{Q}, t)} + \frac{d}{dt} \underbrace{F(q, p, Q, P, t)}$$

mit der erzeugenden Funktion F

erfüllen.

Beweis: Variationsprinzip im Phasenraum Γ

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt L_H = 0 \rightarrow$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt L_K = 0 \rightarrow$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P}, \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q}$$



$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} F = 0$, die beiden Variationen
 unterscheiden sich nur um ein totales
 Differential dF .

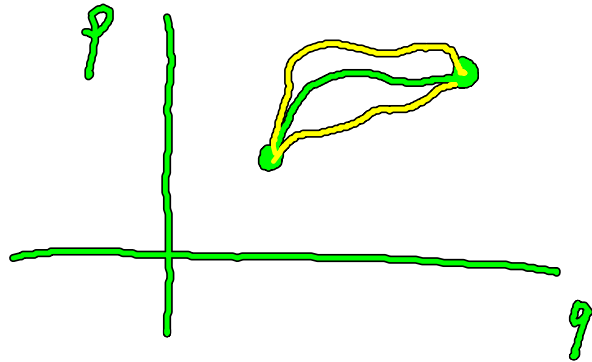
Deshalb gilt

$$\delta \int dt L_H = 0 \iff \delta \int dt L_K = 0 \quad .$$

Ausgenutzt wurde, dass

$$\delta q = 0, \delta p = 0, \delta Q = 0, \delta P = 0$$

an den Rändern ..



Im pq - $\mathcal{H}(q, p, t) = P\dot{Q} - K(Q, P, t) + \frac{d}{dt} F(q, p, Q, P, t)$

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{L}: \quad \underline{Q} = Q(q, p, t) \\ \mathcal{L}: \quad \underline{P} = P(q, p, t) \end{array} \right\} \quad \text{2.f. Transformationsgleichungen}$$

sind in der erzeugenden Funktion F

2f+1 Variablen unabhängig.

1) Funktion F_1 : Auflösen nach q und Q

Wir lösen $Q = Q(q, p, t)$ nach p auf,
welches wir in $P = P(q, p, t)$ einsetzen

$$\Rightarrow P = P(q, P(Q, q, t), t).$$

$$F = F_1(q, Q, t).$$

Dann lautet die erzeugende Gleichung explizit

$$dF_1 = p dq - P dQ + (K - H) dt$$

||

$$\frac{\partial F_1}{\partial q} dq + \frac{\partial F_1}{\partial Q} dQ + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt$$

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}, \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \quad i = 1, \dots, f$$

Nochmal differenzieren:

$$\left[\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial F_1}{\partial Q_j \partial q_i} = \frac{\partial F_1}{\partial q_i \partial Q_j} = - \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right]$$

als Matrix

$$\left(\frac{\partial P}{\partial Q} \right)^T = - \frac{\partial P}{\partial q}$$

Beispiel: $F_1(q, Q, t) \equiv q Q$

$$\Rightarrow P = \frac{\partial F_1}{\partial q} = Q$$

$$I = - \frac{\partial F_1}{\partial Q} = -q, \quad K = \mathbb{H}$$

\Rightarrow Rolle von Orts- und Impulsbedingungen sind (modulu - -Zeichen) vertauscht.

F_2 : Auflösen nach q und P

Definiere F_2 als Legendre-Transform von F_1

mit $Q \rightarrow P = - \frac{\partial F_1}{\partial Q}$

$$F_2(q, P, t) \equiv Q P + F_1(q, Q, t)$$

Diese Erzeugende ist enorm wichtig, sie
 wird als $S(q, P, t) \equiv F_2(q, P, t)$.

$$\begin{aligned} \underline{dS} &= dF_2 = d(F_1 + QP) = \\ &= dF_1 + d(QP) = \underbrace{p dq - P dQ + (K-H) dt}_{dF_1} + \underbrace{dQP}_{+ Q dP} \\ &= \underline{p dq + Q dP + (K-H) dt} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial S}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial S}{\partial P} = Q, \quad K = H + \frac{\partial S}{\partial t}$$

Beispiel: $F_2(q, P, t) \equiv f(q, t)P$

$$\rightarrow Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial F_2}{\partial P} = f(q, t)$$

Das ist ein Punkttrafo (nur Ortskoordinaten)

\Rightarrow Punkttrafos sind kanonisch. Gut!

3) F_2 : Auflösen nach p, Q

In $F_1(q, Q, t)$: swap $q \leftrightarrow p = \frac{\partial F_1}{\partial q}$

$$F_3(p, Q, t) = -pq + F_1(q, Q, t)$$

\uparrow
 \uparrow
Legendre.

$$dF_3 = -d(pq) + dF_1$$

$$= -qdp - \cancel{pdq} + (\cancel{pdq} - P dQ + (K-H)dt)$$

wir sind die q -Abhängigkeit losgerader.

$$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}, \quad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q}, \quad K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

Wegen Vertauschbarkeit der Ableitung

$$\left(\frac{\partial q}{\partial Q}\right)^T = \frac{\partial P}{\partial p}$$

(entspricht
Maxwell-Relationen
in der Thermodyn.)

F_4 : Auflösen nach p und P

p, P .

$$F_1(q, Q, t)$$

$$\begin{array}{c} \updownarrow \quad \updownarrow \\ p \quad P \end{array}$$

durch doppelte
Legendetransfo

$$F_4(p, P, t) \equiv -pq + PQ + F_1(q, Q, t)$$

$$dF_4 = -\cancel{pdq} - \underline{qdp} + \underline{PdQ} + QdP + dF_1$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial P} = Q, \quad \underline{\frac{\partial F_4}{\partial p} = -q}, \quad K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$$

Das sind die üblichen F s; F_1, F_2, F_3, F_4 .

⇒ Analogie zur Thermodynamik:

Potentiale

F

freie Energie

H

Enthalpie

Ω

grandkanonisches Potential

G

Gibbs-Potential

Kanonizität und Symplektische Form

Wir stellen die Bedingungen zusammen, die wir bei F_1, \dots, F_4 aufgeschrieben hatten.

$$\left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)^T = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} ; \quad \left(\frac{\partial p}{\partial \mathcal{L}}\right)^T = \frac{\partial Q}{\partial q}$$

$$\left(\frac{\partial q}{\partial Q}\right)^T = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} ; \quad \left(\frac{\partial q}{\partial \mathcal{P}}\right)^T = -\frac{\partial Q}{\partial p}$$

$2f \times 2f$ Jacobi Matrix

$$\mathbb{T} \equiv \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial \mathcal{L}} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial \mathcal{L}} \end{pmatrix}$$

$\underline{x} = (q, p), \quad \underline{X} = (Q, \mathcal{L})$

$$T_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial X_k}$$

Satz: Eine Transformation $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ ist genau dann kanonisch, wenn die Jacobi-Matrix $T = \frac{\partial z}{\partial z'}$ symplektisch ist, d.h. wenn gilt

$$T^T I T = I, \quad I = \begin{pmatrix} 0_f & \mathbb{1}_f \\ -\mathbb{1}_f & 0_f \end{pmatrix}$$

mit $0_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{1}_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \} f \times f.$

Beweis: $T^T I T = I \Rightarrow I T^T I T = I \cdot I = -\mathbb{1}$

$\Rightarrow J T^T J = -T^{-1}$ ist zu zeigen.

$$\begin{aligned} -J T^T J &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\partial q/\partial Q)^T & (\partial p/\partial Q)^T \\ (\partial q/\partial P)^T & (\partial p/\partial P)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\partial p/\partial P)^T & (\partial q/\partial P)^T \\ -(\partial p/\partial Q)^T & (\partial q/\partial Q)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial Q/\partial p & \partial Q/\partial p \\ \partial P/\partial q & \partial P/\partial p \end{pmatrix} = T^{-1} \end{aligned}$$

Poissonklammer

$$\{f, g\} \equiv \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p}$$

$$= - \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial q} & \frac{\partial f}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial q} \\ \frac{\partial g}{\partial p} \end{pmatrix}$$

$$x = (q, p)$$

$$= - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T J \frac{\partial g}{\partial x}$$

Satz: Unter kanonischen Transformations $x \rightarrow y$ bleiben die Poisson-Klammern zweier Funktionen invariant, d.h.

$$\{f, g\}_x = \{f, g\}_y$$

Beweis: $\frac{\partial g}{\partial y_i} = \sum_k \frac{\partial g}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} = \sum_k T_{ki} \frac{\partial g}{\partial x_k}$

$\left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^T = T^T \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^T$

$$\begin{aligned} \{f, g\}_y &= - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^T I \frac{\partial g}{\partial y} = - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T T I T^T \frac{\partial g}{\partial x} \\ &= - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T I \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^T = \{f, g\}_x \quad \blacksquare \end{aligned}$$