

26.11.

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

$$S = W - Et, \quad W \text{ verkürzte Wirkung}$$

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} = \nabla_q W(q);$$

$$H = E \Rightarrow \frac{1}{2m} (\nabla W)^2 = E - V(q).$$

Eikonalgleichung in der Optik

Wellengleichung $\Delta u(q,t) - \frac{n^2(q)}{c^2} \frac{\partial^2 u(q,t)}{\partial t^2} = 0$

q : Ort

u : eine Komponente z.B. des \underline{E} -Feldes

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$n(q)$: Brechungsindex.

Fall 1: $n(q) = n = \text{const}$

Wellengl. hat Lösungen $e^{i(\underline{k}q - \omega t)}$

$$u_{\underline{k}}(q, t) = \underbrace{u_{\underline{k}}}_{\text{Amplitude}} e^{i(\underline{k}q - \omega t)}$$

"ebene Wellen"

Auch Superpositionen sind Lösungen.

\underline{k} : Wellenvektor; $|\underline{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n \cdot \omega}{c}$
 λ Wellenlänge "Dispersionsrelation"

zwischen Winkelfrequenz ω
und Wellenlänge λ .

Fall 2: $n(q)$ Ortsabhängig:

i.A. nicht mehr lösbar

$$\Delta u - \frac{n^2(q)}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

(Näherungs) Ansatz

$$u(q, t) = e^{A(q) + i(k_0 L(q) - \omega t)}$$

einsetzen

$k_0 = |\underline{k}_0| = \frac{\omega}{c}$, \underline{k}_0 gibt die Richtung
der Welle an.

Für $n(q) = n$: $k_0 L(q) = n \underline{k_0} q$

$L(q) = n \frac{k_0}{|k_0|} \cdot q$ "optische Weglänge"
"EIKONAL".

Folgt einsetzen in die Wellengleichung \Rightarrow

$$\underbrace{\Delta A(q)}_{\text{div grad}} + \underbrace{(\nabla A(q))}_{\text{grad}}^2 + \underbrace{k_0}_{\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)}^2 \left[\underbrace{n(q)}_{\lambda_0 \text{ Wellenlänge in Vakuum}}^2 - (\nabla L(q))^2 \right] = 0$$

Näherung: für $\lambda_0 \ll$ typische Längenskala in $A(q), n(q)$

vernachlässigen wir $\Delta A(q), \nabla A$ und erhalten die Eikonalgleichung $[] = 0$

$$(\nabla L(q))^2 = n(q)^2$$

Approximation der Wellengleichung im Grenzfall der geometrischen Optik.

Analogie:

$$(\nabla L)^2 = n(q)^2$$

Optik: Eikonal Gleichung

$$(\nabla W(q))^2 = 2m(E - V(q))$$

Mechanik: verkleinerte Ham.-Jac. gl. für Wirkung W

$$W(q) - Et = \text{const}$$

Mechanik: „Wellenfronten der Wirkung S“

$$L(q) - \frac{\omega}{k_0} t = \text{const}$$

Optik: Wellenfronten der Phase kol-akt

$$W(q) = \underline{k} \cdot \underline{q}$$

Mechanik: freies Teilchen

$$L(q) = \underline{k} \cdot \underline{q}$$

Optik: freies Lichtstrahl $n=1$.

Wellentheorie des Lichtes

QM!
20. Jhdt.

19. Jhdt.

Optik

$$(\nabla L)^2 = n^2$$

19. Jhdt. Mechanik

$$(\nabla W)^2 = 2m(E - V)$$

Prinzip von Maupertuis

Euler-Lagrange

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\underline{r})$$

1 Teilchen in $d=3$ Dimensionen.

verkürzte Wirkung \underline{r}

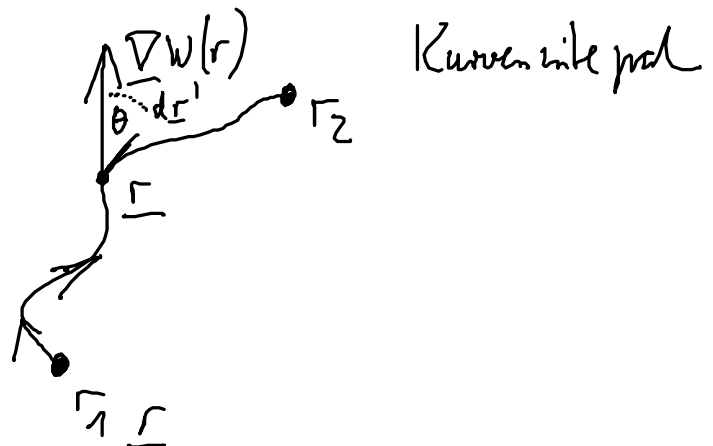
$$* W(\underline{r}, E) = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} p(\underline{r}') d\underline{r}'$$

$$\text{denn es war } p(\underline{r}) = \underline{\nabla} W(\underline{r})$$

hier ist die Energie E festgehalten

(anders als beim Hamiltonschen Variationsprinzip, wo t_1 und t_2 fest waren aber verschiedene E an Massen waren).

* wegunabhängiges Integral



$$W(\underline{r}, E) = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} p(\underline{r}') d\underline{r}' = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underbrace{|\underline{\nabla} W(\underline{r}')| \cdot |\underline{dr}'| \cdot \cos \theta}_{\text{Skalarprodukt}}$$

$$W(\underline{r}, E) \leq \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} |\underline{\nabla} W| |\underline{dr}'| = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \sqrt{2m(E - V(\underline{r}'))} |\underline{dr}'|$$

immer größer als $W(\underline{r}, E)$

Falls $\cos \theta = 1$ überall, dann „=“

das ist der Fall $\underline{\nabla}W \parallel d\underline{r}'$

$$\Leftrightarrow \underline{p} = \underline{\nabla}W \parallel d\underline{r}' \quad \underline{p} = m \dot{\underline{r}}$$

mit $\dot{\underline{r}}$ tangential an die Kurve.

Satz von Maupertuis: Unter allen Bahnen gleicher Energie E mit festem Anfangs- / Endpunkt \underline{r}_1 nimmt die

verkürzte Wirkung $W \equiv \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} |\underline{\nabla}W| |d\underline{r}'| =$

$$= \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \sqrt{2m(E - V(\underline{r}'))} |d\underline{r}'| \quad \text{für die tatsächliche}$$

Bahn ($\underline{p} \parallel \dot{\underline{r}}$) ein Minimum an.

Explizit $\delta \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \sqrt{2m[E - V(\underline{r})]} |d\underline{r}| = 0$

d.f. Differential

Analog hat man in der (geometrischen) Optik das

Prinzip von Fermat

$$\delta \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} n(\underline{r}) |d\underline{r}| = 0$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{optische Brechungsindex.}}$

Wirkungs- und Winkelvariablen

Periodische Bewegungen in $d=1$, $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$

$$H = E, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -V'(q)$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + V(q) \Rightarrow \dot{q} = \frac{dq}{dt}$$

$$t - t_0 = \int_{q_0}^q \frac{dq'}{\sqrt{2(E - V(q'))/m}} \quad \} \rightarrow q = q(t)$$

Alternativ: Ham.-Jacobi $p = \frac{\partial W}{\partial q}$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + V(q) = E \equiv P$$

$$W(q,P) = \int_{q_0}^q \sqrt{2m(E - V(q'))} dq'$$

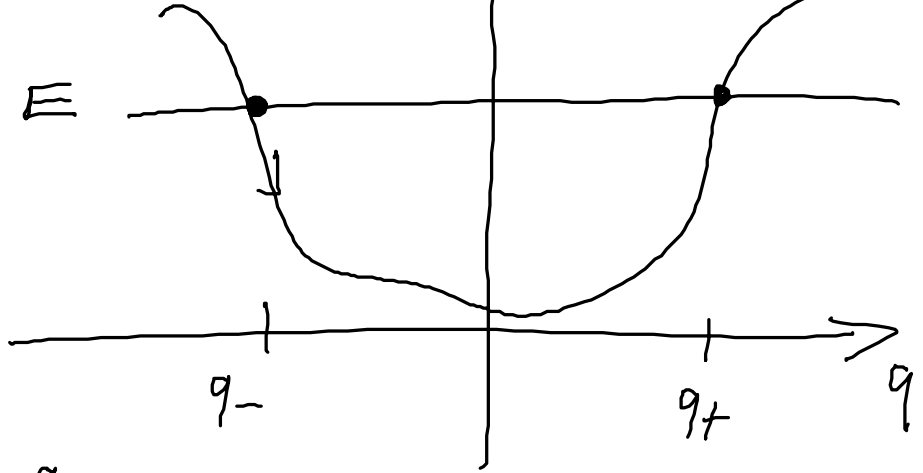
$$Q(q,P) = \frac{\partial W}{\partial P} = \int_{q_0}^q \frac{dq'}{\sqrt{2[P - V(q')]/m}}$$

neue „Impulsvariable“ $P = E = \text{Energie}$

neue „Ortskoordinate“ $Q = t - t_0$

Wir wollen die Frequenz berechnen

$\uparrow V(q)$



$$\tau = \tau(E) = 2 \int_{q_-}^{q_+} \frac{dq'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(q'))}}$$

$$= 2 \frac{\partial}{\partial E} \int_{q_-}^{q_+} dq' \underbrace{\sqrt{2m(E - V(q'))}}_{\text{Impuls } \pm p(E)}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(q) \Rightarrow p(q, E) = \pm \sqrt{2m(E - V(q))}$$

Wir können das Integral auch schreiben als

$$\tau = \tau(E) = \frac{\partial}{\partial E} \underbrace{\oint p(q, E) dq}_{\text{Wirkungsintegral}}.$$

Lässt sich konkret ausrechnen, z.B.

$$\begin{aligned} \text{für } & - V(q) = \frac{1}{2} k q^2 \\ & - V(q) = \frac{1}{2} k q^2 + d q^4, \quad d > 0. \end{aligned}$$

Unterscheidung (Klassifikation) periodische Bewegungen

- Libration: Ortskoordinate, z.B. der Winkel, beschränkt
- Rotation: Ortskoordinate ist unbeschränkt

