

13.1.09

13.1.09

Schaukel  $\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$

$\omega(t+T) = \omega(t)$ ,  $T$  Periode

$y'(t) = A(t)y(t)$ ,  $A(t) = A(t+T)$

$U(T+t_0, t_0) \equiv \mathcal{F}(t_0)$  Floquetoperator

$\mathcal{F}^n \underline{u}_i = \lambda_i^n \underline{u}_i$   $\lambda_i$ : Floquet-Eigenwert

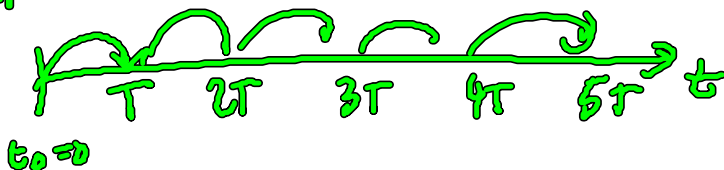
Anfangsbedingung  $y(t_0) = \underline{u}_i$

Falls  $|\lambda_i| > 1$ , wächst das AB  
mit der Zeit an

$$y(nT + t_0) = F^n \underline{u}_i = \lambda_i^n \underline{u}_i \Rightarrow \quad \parallel \parallel$$

$$\rightarrow \|y(nT + t_0)\| = \underbrace{|\lambda_i|^n}_{AB, \text{ auf 1 normiert}} \underbrace{\|\underline{u}_i\|}_{\text{normiert}}$$

$n$ : # der Perioden



## Floquet - Theorem

$$F \underline{u}_i = \lambda_i \underline{u}_i ; \quad \lambda_i = e^{\sigma_i T}$$

$\sigma_i$ : Floquet-Exponent!

Floquet-Operator in Exponential-Form

$$\underline{F} = e^{\underline{S} \cdot T}$$

$\uparrow$   $n \times n$ -Matrix mit  
EW  $\sigma_i$

In der Basis der EV  $\underline{u}_i$   
ist die Matrix  $\underline{S}$  diagonal,  $\underline{S} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \dots & \\ & & \sigma_n \end{pmatrix}$

## Satz:

Sei  $y'(t) = A(t)y(t)$  ein  
lineares DGL-System mit zeitlich periodischer  
Matrix  $A(t) = A(t+T)$  mit Periode  $T$ :

$\Rightarrow$  Zeitentwicklungsoperator

$$\| U(t, t_0) = V(t) e^{S \cdot (t-t_0)} \|$$

wobei  $S$  die  $n \times n$ -Matrix der Floquet-Exponenten  
und  $V(t) = V(t+T)$  eine  $T$ -periodische  
 $n \times n$ -Matrix mit  $V(t_0) = E$  (Einheitsmatrix)  
ist.

Beweis: Zeitentw. über Periode  $T$

$$\| U(T+t_0, t_0) = \underbrace{V(T+t_0)}_{V(t_0) = E} e^{S(T+t_0-t_0)} = I(t_0) \|$$

$$U(t, t_0) = U(t+T, t_0+T)$$

$$\Rightarrow \cancel{V(t) e^{S(t-t_0)}} = \cancel{V(t+T) e^{S(t+T-(t_0+T))}}$$

$$V(t) = V(t+T) \Rightarrow V \text{ ist periodisch.}$$

# Parametrisierter Linearer Oszillator

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0; \quad y' = A(t)y$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(t) & 0 \end{pmatrix}; \quad \omega(t) = \omega(t+T)$$

$\mathcal{F}(t_0)$  ist eine  $2 \times 2$  Matrix

$$\mathcal{F}(t_0) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{Ew durch}$$

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda(a+d) + ad - cb = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lambda^2 - \lambda \cdot \text{Tr } \mathcal{F} + \det \mathcal{F} = 0}$$

Die Matrix  $A(t)$  in der DGL  $y' = A(t)y$

ist spurlos,  $\text{Tr } A(t) = 0$

$$\Rightarrow \det \mathcal{F}(t_0) = 1,$$

$$\text{denn } \frac{d}{dt} W(t, t_0) = \underbrace{\text{Tr } A(t)}_0 W(t, t_0),$$

$$W(t_0, t_0) = 1$$

$$W(t, t_0) = \det \mathcal{U}(t, t_0)$$

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{Tr} \mathcal{F} + 1 = 0$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left( \operatorname{Tr} \mathcal{F} \pm \sqrt{(\operatorname{Tr} \mathcal{F})^2 - 4} \right)$$

für die zwei EW. Wegen  $\det \mathcal{F} = \lambda_+ \lambda_- = 1$ .

Für  $|\operatorname{Tr} \mathcal{F}| < 2$  hat man  
zwei komplexe EW  $\lambda_+ = \lambda_-^*$

$$\begin{aligned} \text{Wegen } \lambda_+ \lambda_- = 1 &\Rightarrow |\lambda_+| |\lambda_-| = 1 \\ &\Rightarrow |\lambda_{\pm}| = 1. \end{aligned}$$

Für  $|\operatorname{Tr} \mathcal{F}| \geq 2$  „wird es gefährlich“

$\Rightarrow$  Aufschaukeln von Lösungen  
(parametrische Resonanz).

Konkret  $\omega^2(t) = \omega_0^2 (1 + \varepsilon \sin \omega_{\text{ext}} t)$

Stärke  $\varepsilon$ ;  $\omega_{\text{ext}} = \frac{2\pi}{T}$

$\omega_0$  Eigenfrequenz des ungestörten Oszillators.

Idee „Störungsantwortung“ für kleine  $\varepsilon \ll 1$ .

$$F = \mathcal{U}(T, 0) \quad | \dot{\omega} \quad \varepsilon = 0 \text{ bestimme}$$

„Taylorreihen“  $F(\varepsilon=0) + \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \varepsilon^3 F_3$

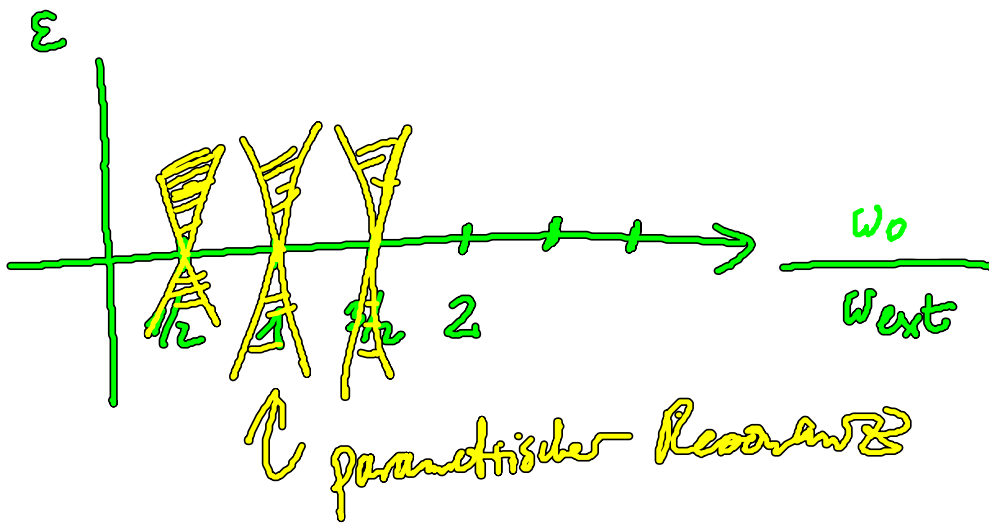
$$F(\varepsilon=0) = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 T & \frac{\sin \omega_0 T}{\omega_0} \\ -\omega_0 \sin \omega_0 T & \cos \omega_0 T \end{pmatrix}$$

Damit wird die kritische Anfahrbedingung

$$|\det F| = |2 \cos \omega_0 T| = 2 \quad (\varepsilon=0)$$

$$\Rightarrow |\cos \omega_0 T| = 1 \Rightarrow \omega_0 T = n\pi ; \quad \omega_{\text{ext}} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega_{\text{ext}} = \frac{2\omega_0}{n}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$



Zielt numerische Lösung der DGL, um einen Überblick zu erhalten:

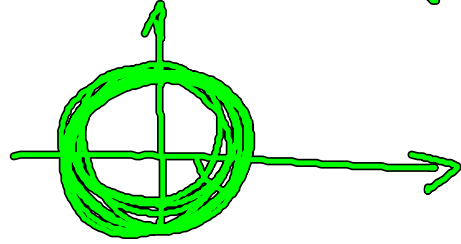
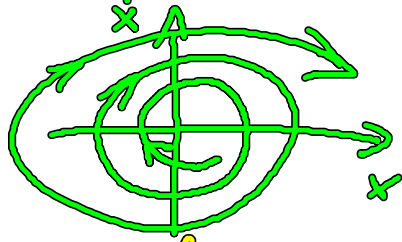
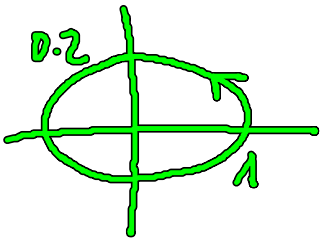
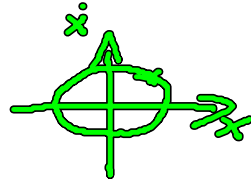
$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$$

als System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega^2(t)x \end{aligned}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 (1 + \epsilon \sin(\omega_{ext} t))$$

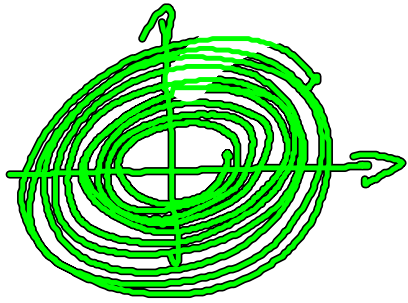
Phasenraum  $(x, y = \dot{x})$   
 $\epsilon = 0.3$



$$\omega_0 / \omega_{ext} = 0,25$$

$$\uparrow = 0,5$$

$$0,75$$



$$\omega_0 / \omega_{ext} = 1,0$$



parametrische Resonanz

$$\text{für } \frac{\omega_0}{\omega_{ext}} = \frac{1}{2}, 1 \text{ (sehr sichtbar)}$$

Nicht-lineare Schwingungen

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = f(t) \quad \text{linear}$$

Reibungsterm

$$\ddot{x} + a(x,t)\dot{x} + b(x,t) = 0$$

Bsp:  $\ddot{\varphi} + \sin \varphi = 0$

Zeitunabhängiger Koeff: autonome DGL

$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$  Liénard-Gleichung

Wir kennen bereits den Fall  $f(x) \equiv 0$ :

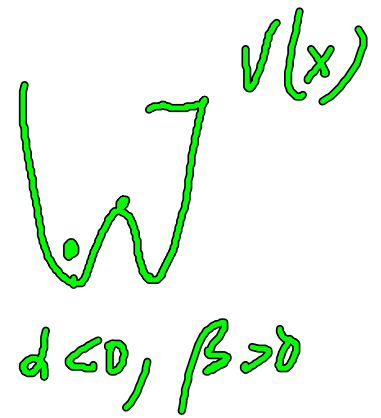
1d Bewegung, Masse  $m$

$m\ddot{x} = -V'(x)$

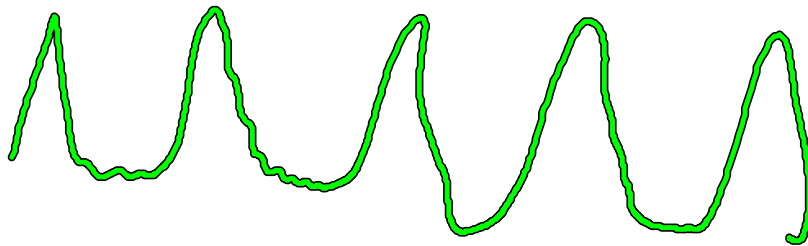
Lösen mit Energiesatz,

$V(x) = \alpha x^2 + \beta x^4$

(konservativ).



Der van-der-Pol-Oszillator



$\ddot{x} + k(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, k \geq 0$

Schreiben als dynamisches System (DS)

$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$



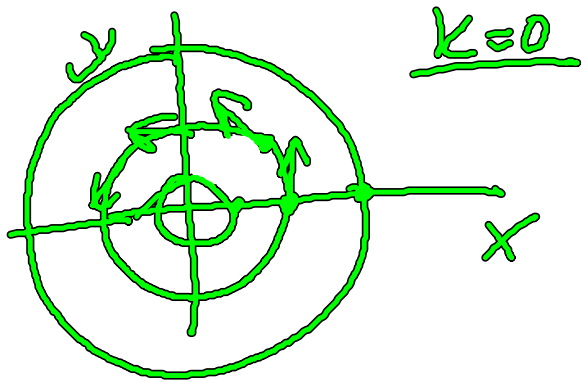
$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -x - \kappa(x^2 - 1)y$$

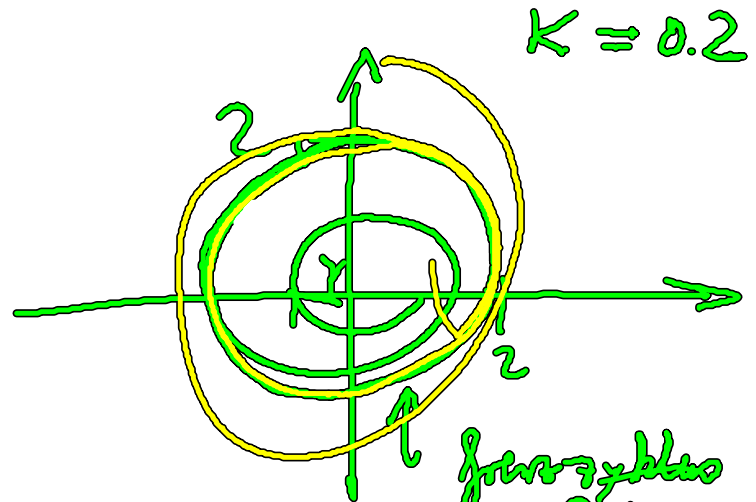
2d-System

$\kappa=0$ : kann Oss. mit Frequenz  $\omega=1$ .

Nichtlinearer Term  $\kappa(x^2 - 1)$



Kreise abh.  
von  $A, B$



Limitzyklus  
mit Radius 2

Analyse: kleine  $\kappa \ll 1$ , durch Nichtlinearität  $\kappa$   
Näher limitzyklus mit Radius  $r=2$  (numerisch)

$$(*) \quad \begin{aligned} x(t) &= r \cos t + \xi(t) \\ y(t) &= r \sin t + \eta(t) \end{aligned}$$

Zeige  $r=2$   
herauskommt

Betrachte zeitliche Änderung

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x^2(t) + y^2(t)) = x\dot{x} + y\dot{y} =$$

$$= \cancel{x\dot{y}} + y(-\cancel{\dot{x}} - \kappa y(x^2 - 1)) = -\kappa(x^2 - 1)y^2$$

$$\stackrel{(*)}{=} -\kappa r^2 \sin^2 t (r^2 \cos^2 t - 1) + O(\xi, \eta).$$

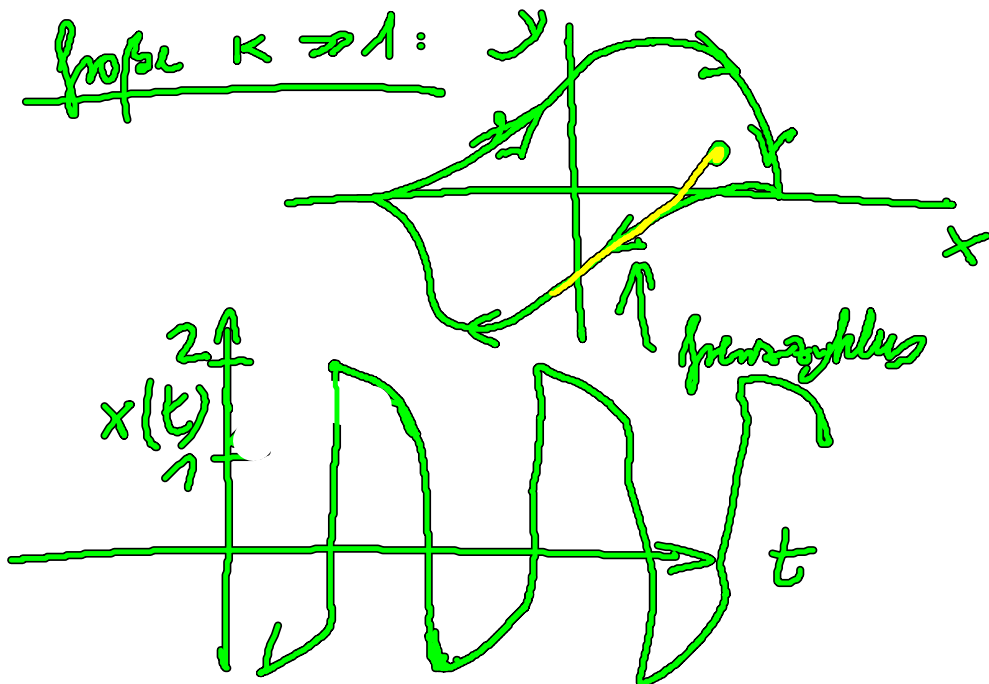
Forderung:

$$\Delta_0 = (x^2 + y^2)(t) \Big|_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} dt \frac{d}{dt} (x^2 + y^2)$$

$$\stackrel{\approx}{=} \int_0^{2\pi} dt (-2\kappa r^2) (r^2 \cos^2 t - 1) \sin^2 t$$

$$= -\frac{\pi}{2} r^2 (r^2 - 4) \Rightarrow r = 2$$

Probe  $\kappa \Rightarrow 1$ :



10 20

# Relaxation strategies →