

21.1.09

21.1.09

Laser:

$N(t)$

angeregte Atome

$n(t)$

Photonen in
einer Kavität

$$\frac{d}{dt} n(t) = G n(t) N(t) - k n(t)$$

$$\frac{d}{dt} N(t) = -Gn(t)N(t) - fN(t) + p$$

p Pump rate

$k > 0$ Verlust-Koeffizient (Rate)

$G > 0$ „gain-Koeffizient“

$f > 0$ spontane Emission
stimulierte Emission von Photonen

- Diese Gleichungen beschreiben (phänomenologisch) einen Laser.

- Nichtlineares DS, $d=2$ Dim.
Nichtlineare Terme nN

Approximation: Annahme, dass $N(t)$ sehr viel schneller relaxiert als $n(t)$, damit

$$\frac{d}{dt} N \approx 0 \Rightarrow 0 = -GnN - fN + p$$

$$\Rightarrow N = \frac{p}{Gn + f}, \text{ einsetzen in gl. für } \dot{n},$$

$$\| \frac{d}{dt} n(t) = \frac{Gn(t)p}{Gn(t) + f} - kn(t) \equiv F(n(t))$$

Diese fl. hat Fixpunkte

$$0 = \dot{n} = n \left(\underbrace{\frac{Gp}{Gn+f} - k}_{=0} \right) \Rightarrow \underline{\underline{n_0^* = 0}}$$

$$\frac{Gp}{k} = Gn + f \Rightarrow \underline{\underline{\dots}}$$

$$\underline{\underline{n_p^* = \frac{p}{k} - \frac{f}{G}}}$$

wird negativ falls
 $p < p_c \equiv \frac{kf}{G}$,
dann unphysikalisch.

Stabilität der FP

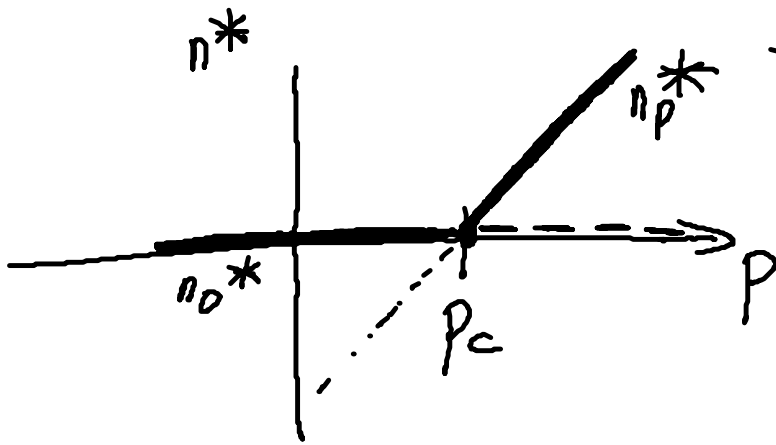
1. Ableitung $F'(n) = \frac{Gp}{Gn+f} - \frac{G^2 n p}{(Gn+f)^2} - k$

$$F'(n_0^*) = \frac{Gp}{f} - k$$

$$F'(n_p^*) = - \frac{G^2 p n_p^*}{(Gn_p^* + f)^2}$$

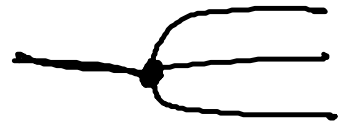
Für $p < p_c \equiv \frac{kf}{G}$ wird $F'(n_0^*) < 0 \Rightarrow n_0^*$ stabil,
d.h. für $p < p_c$ ist $n_0^* = 0$ stabil

Für $p > p_c$ wird $F'(n_0^*) > 0$ und $F'(n_p^*) < 0$
 d.h. für $p > p_c$ ist $n_p^* = \frac{p}{k} = \frac{1}{G} > 0$ stabil



Hier liegt bei $p = p_c$ eine
 transkritische Bifurkation vor.

8.4.3. Hengabel-Bifurkation

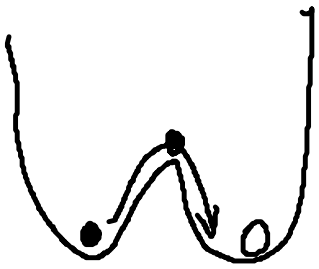


1) Supercritische Hengabel-Bifurkation.

Beispiel: Teilchen der Masse $m=1$ in $d=1$ Dim.,
 im Potential

$$V(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}\Gamma x^2,$$

$\Gamma \in \mathbb{R}$ Kontrollparameter



$\Gamma > 0$

Bewegungsgleichung:

$$\begin{cases} \dot{x} = p \\ \dot{p} = -v'(x) = \Gamma x - x^3 \end{cases}$$

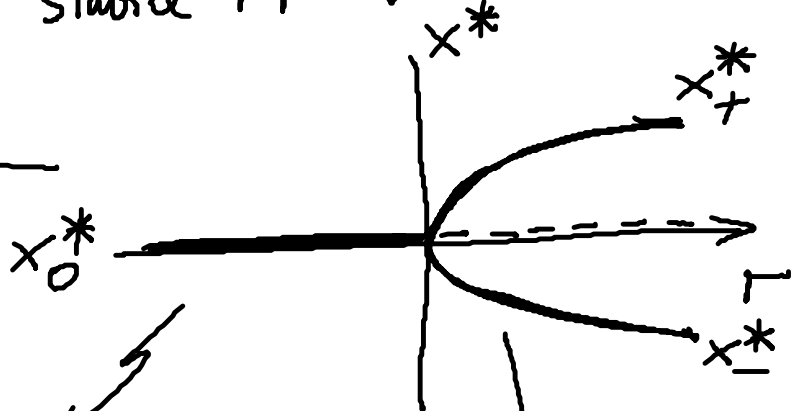
FP $(x^*, 0)$ im Phasenraum der (x, p)

$$\Gamma x^* - (x^*)^3 = 0 \implies$$

$x_0^* = 0$ einziger stabiler FP für $\Gamma < 0$

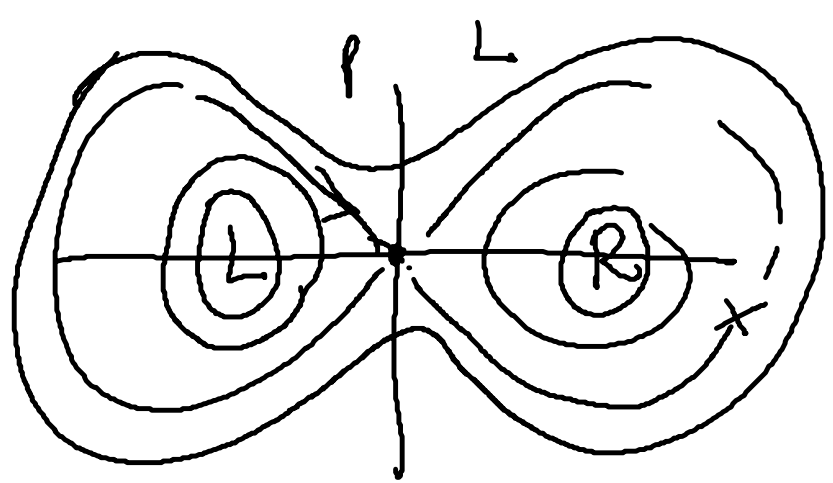
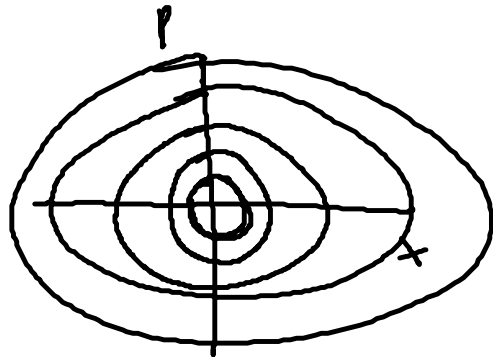
$x_0^* = 0$ instabiler FP
 $x_{\pm}^* = \pm\sqrt{\Gamma}$ stabile FP
 für $\Gamma > 0$.

Bifurkationsdiagramm:



$$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}|\Gamma|x^2$$





8.4.4. Hopf-Bifurkation.

Standardbeispiel :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x + y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= -x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

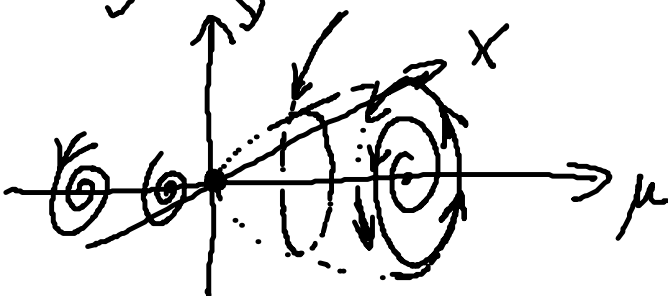
FP $\underline{x}^* = (0,0)$, Jacobi-Matrix mit
 $\lambda_{\pm} = \mu \pm i$ (Nachrechnen)

$\mu < 0$: x^* stabiler Strudel,
 wird instabil für $\mu > 0$:

Umschreiben in PKO : $\dot{r} = r(\mu - r^2)$
 $\dot{\varphi} = 1$

Grenzyklus mit Radius $r = \sqrt{\mu}$

Superkritische Hopf-Bifurkation



Hamiltonsche Systeme und Chaos

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}), \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_d(t) \end{pmatrix}$$

autonomes DS,

ab $d=3$ kann es chaotische Lösungen geben.

Mech. System mit f Freiheitsgrade

\Rightarrow Hamiltonsche gl. als dynamisches System
der Dimension $d = 2f$.

Ab $f=2$ kann es Chaos geben.

Teilchen der Masse m im Potential $V(x, y)$

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + V(x, y) = E = \text{const}$$

Henon-Heiles-Hamiltonian: $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{1}{3} y^3$

in PKO $V(r, \theta) = \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} \sin(3\theta)$

nichtlineares Potential.

Wie kann man die Trajektorien im Phasenraum (x, y, p_x, p_y)
sinnvoll darstellen.

Poincaré-Schnitte

Betrachten feste Ebene im Phasenraum, z.B.

$p_x = x$ Ebene mit $y = 0$

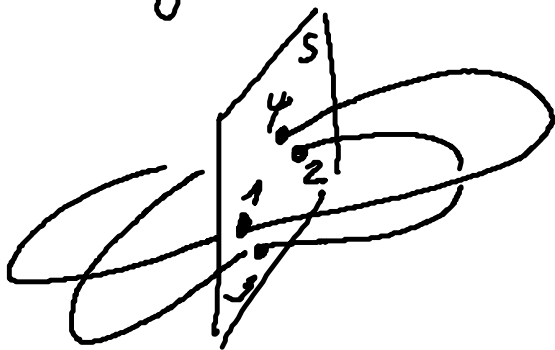
4. Variable p_y aus $E = \text{const}$:

$$p_y = \pm \sqrt{2m \left(E - \frac{p_x^2}{2m} - V(x, 0) \right)}$$

Wir folgen der Trajektorie, die zu bestimmten Zeiten die p_x - x -Ebene „durchsticht“.

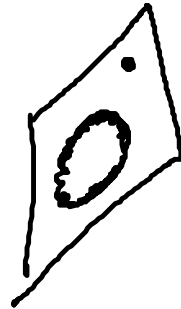
\Rightarrow Zeitentwicklung in der Ebene $S(p_x-x)$,

Abbildung: $P: S \rightarrow S$



$$\underline{x}_n \rightarrow \underline{x}_{n+1}$$

$$\underline{x}_{n+1} \rightarrow \underline{x}_{n+2}$$



P Poincaré-Abbildung muß durch numerische Lösung des DS bestimmt werden.

\Rightarrow führt auf $\underline{x}_{n+1} = F(\underline{x}_n)$
diskretes dynamisches System.

$$\underline{x}_{n+1} = f(\underline{x}_n)$$

8.6. Driddimensionale Systeme

$d = 3 \neq 2f$ nichts Hamiltonsch

Das Lorenz-Modell (STROGATZ)

$$\dot{x} = \sigma(y-x)$$

$$\dot{y} = r x - y - x z$$

$$\dot{z} = x y - b z$$

$$\sigma, r, b > 0$$

σ Prandtl-Zahl

r Rayleigh-Zahl : $\frac{\text{Antriebsstärke}}{\text{Dissipation}}$

$$\operatorname{div} \underline{F}(\underline{x}) = -\sigma - 1 - b < 0$$

→ Volumen im Phasenraum der (x, y, z) schrumpft mit der Zeit t .

FP : $C_0 = (0, 0, 0)$

$$C_{\pm} = (\pm \sqrt{b(r-1)}, \pm \sqrt{b(r-1)}, r-1), r > 1$$

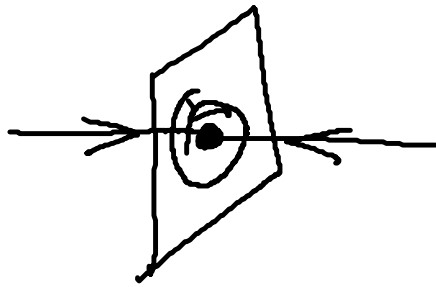
$0 < r < 1$: C_0 stabil

Bei $r=1$: Gabelung-Bifurkation, bei der

C_0 instabil und C_{\pm} stabil werden

$1 < r < r_H \equiv \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1}$: C_{\pm} sind stabil

C_{\pm}



Bei Γ_H : C_+ subkritische Hopf-Bifurkation.

Oberhalb von Γ_H : numerisch, AB $(0, 1, 0)$

$$\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$$



aperiodisch.