

28.1.09

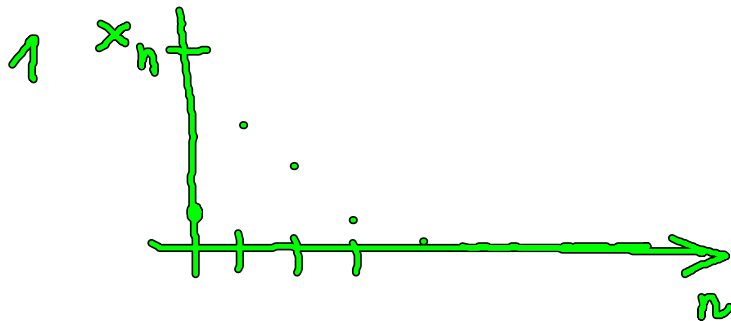
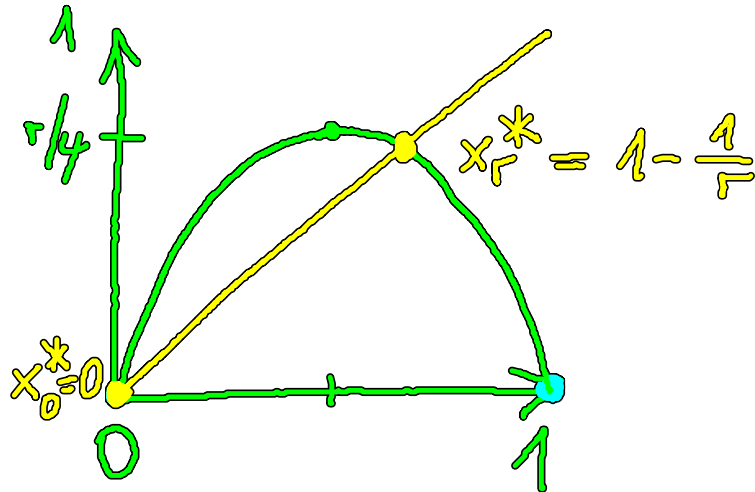
Logistische Abbildung (Iterierte Abbildung)

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) ; r \geq 0$$

$$0 \leq r \leq 4$$

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

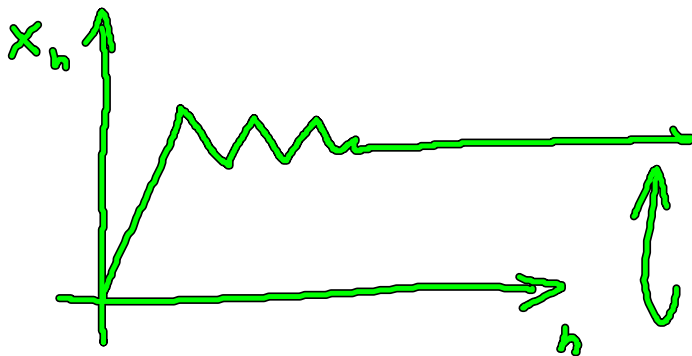
$$f(x) = r x (1 - x)$$



$$r < 1$$

stirbt aus

$$x_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

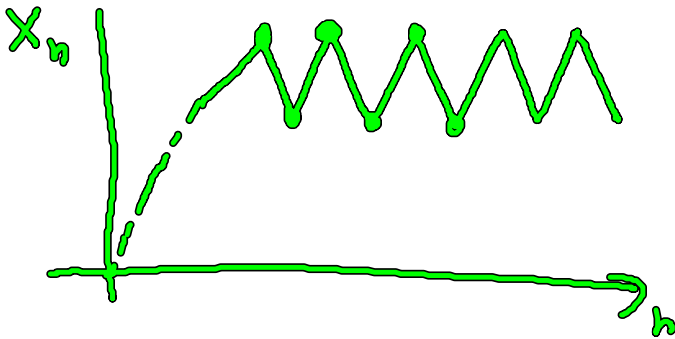


$$1 < r < 3$$

stabiler Wert

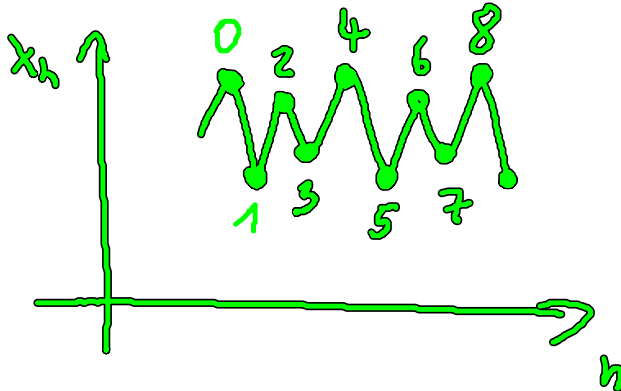
$$\text{stationäres } x_n, n \rightarrow \infty$$

Bei $r=3$ wird x_r^* instabil.

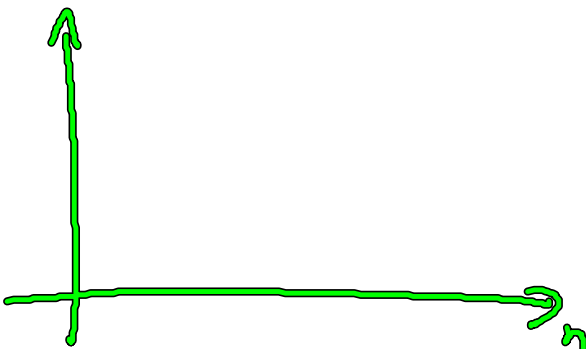


Oszilliert zwischen zwei verschiedenen Werten

$r = 3,01$ Periode 2



$r \geq r_2 = 3,449$
Oszillationen der Periode 4



↓ Periodendopplung
Periode 8

bis $r_\infty = 3,5699\dots$

„Oszillationen mit Periode ∞ “

• Wir finden Periodendopplung

	Periode
$r_1 = 3$	2
$r_2 = 3,449$	4
$r_3 = 3,54409$	8

$$r_{\infty} = 3.5699..$$

$$\delta \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4.669...$$

Figenbaum-Konstante

- periodische Fenster zwischen chaotischen Bereichen.

Periodenverdopplung

bei $r=3$: Iteration $x_{n+1} = f(x_n)$

Fixpunkt $x^{(2)}$ mit

$$f(f(x^{(2)})) = x^{(2)}$$



f zweimal hintereinander schalten,

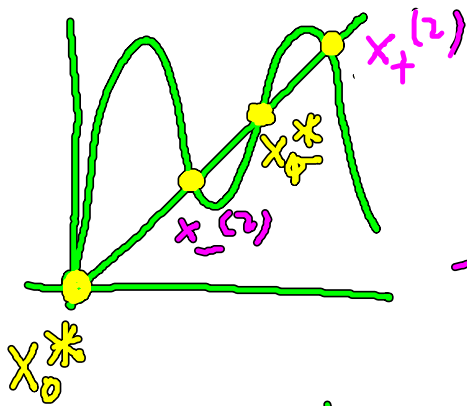
$$f(x) = rx/(1-x)$$

f^2 gibt quartische Gleichung,

$$f(f(x_0^*)) = f(x_0^*) = x_0^*$$

x_0^* ist
FP von f^2

Ebenso $x_r^* \Rightarrow x_{0,r}^*$ können aufaktorielt werden.



$$f^2(x) = x$$

$$\Rightarrow x_{\pm}^{(2)} = \frac{r+1 \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}$$

Stabilität: $\left| \frac{d}{dx} f(f(x)) \right|_{x=x_{\pm}^{(2)}} < 1$

$$\Rightarrow 3 < r < 1 + \sqrt{6}$$

Periodisches Fenster innerhalb des chaotischen

Bereichs:

$$r \approx 3.83$$

Periode-3-Zyklus

3-fach-Iteration $f(f(f(x))) \equiv f^3(x)$

Schnittpunkte $f^3(x) = x$,

i. d. acht Schnittpunkte,

zwei davon uninteressant (FP x_0^* ,
 x_m^*
von $f(x)$).

Von den restlichen 6 sind 3 stabil,

3 instabil.