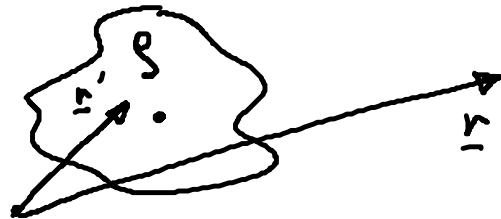


$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

1.4. Elektrische Multipol-Entwicklung

Betrachte räumlich begrenzte
Ladungsverteilung $\rho(\underline{r}')$
in der Umgebung von $\underline{r}'=0$



Frage: asymptot. Verhalten von $\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$
für $r \rightarrow \infty$

Methode: Entwicklung des Integranden in eine
Taylorreihe für $r \gg r'$:

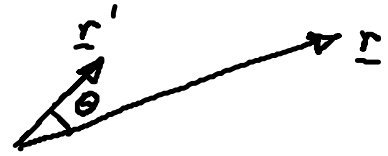
$$G(\underline{r}-\underline{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} (\underline{r}' \cdot \underline{\nabla}_{\underline{r}})^l G(\underline{r})$$

$$\phi(\underline{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \int d^3r' (\underline{r}' \cdot \underline{\nabla})^l G(\underline{r}) \rho(\underline{r}')$$

explizit mit $G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\underline{r}-\underline{r}'|}$ Entwicklung:

$$\frac{1}{|r-r'|} = (r^2 - 2r \cdot r' \cos \theta + r'^2)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left(1 - 2 \frac{r'}{r} \cos \theta + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{-1/2}$$

Durch die für $r' < r$, $|\zeta| < 1$
konvergente Reihe:



$$\underbrace{\left(1 - 2 \frac{r'}{r} \zeta + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right)^{-1/2}}_{\text{Erzeugende}} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^l P_l(\zeta)$$

sind die Legendre-Polynome $P_l(\zeta)$ definiert
(Kugelfunktionen)

$$P_l(\zeta) = \frac{1}{l!} \left[\frac{\partial^l}{\partial t^l} (1 - 2t\zeta + t^2)^{-1/2} \right]_{t=0}$$

insbesondere

$$P_0(\zeta) = 1$$

$$P_1(\zeta) = \zeta = \cos \theta$$

$$P_2(\zeta) = \frac{1}{2} (3\zeta^2 - 1) = \frac{1}{4} (3\cos(2\theta) + 1)$$

also

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int d^3r' \rho(r') \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^l P_l(\cos \theta)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} Q_l r^{-l-1}$$

mit $Q_l = \int d^3r' r'^l \rho(r') P_l(\cos \theta)$ „ 2^l -Pol“

Entwicklung nach Potenzen von r !

Für stark lokalisierte Ladungsverteilungen ($r' \ll r$)
konvergiert die Reihe schnell:

$l=0$: $\phi^{(0)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0}{r}$ $Q_0 = \int d^3r' \rho(\underline{r}')$ el. Monopol
(Gesamtladung)

fällt am langsamsten ab

\Rightarrow Ladungsverteilung wirkt in großer
Entfernung wie Punktladung



$l=1$: $\phi^{(1)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\underline{p} \cdot \underline{r}}{r^3}$ $Q_1 = \int d^3r' \rho(\underline{r}') \underbrace{r' \cos\theta}_{\underline{r}' \cdot \underline{r}} = \frac{\underline{p} \cdot \underline{r}}{r}$

$\underline{p} := \int d^3r' \rho(\underline{r}') \underline{r}'$
(Dipolmoment)

fällt $\sim \frac{1}{r^2}$ ab,

wichtigster Term für insgesamt neutrale Körper
($Q_0 = 0$)



Beispiel : 2 Punktladungen $q, -q$ bei $\underline{r}_1, \underline{r}_2$

$$\rho(\underline{r}') = q [\delta(\underline{r}' - \underline{r}_1) - \delta(\underline{r}' - \underline{r}_2)]$$

$$Q_0 = 0, \quad \underline{p} = q(\underline{r}_1 - \underline{r}_2) = q \underline{a}$$

Feld des Dipolpotenzials:

$$E_i = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \partial_i \frac{p_k x_k}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3x_i p_k x_k}{r^5} - \delta_{ik} \frac{p_k}{r^3} \right)$$

(Summationskonv. !)

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [3(\underline{p} \cdot \underline{r}) \underline{r} - r^2 \underline{p}]$$

$$\sim \frac{1}{r^3} \quad \text{für } r \rightarrow \infty$$

$$\underline{l=2} \quad \therefore \phi^{(2)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r^3}, \quad Q_2 = \frac{1}{2} \int d^3r' \rho(r') (r')^2 (3\cos^2\theta - 1)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3r' \rho(r') \left(3 \underbrace{\frac{r'_x}{r'} \frac{r'_x}{r'}}_{\frac{x'_k x'_k}{r^2}} - r'^2 \right)$$

$$Q_2 = \frac{1}{2r^2} \int d^3r' \rho(r') (3x'_k x'_k - r'^2) x_k x_l$$

Q_{kl} Quadrupolmoment

(spurfrei, symm. Tensor:
 $\sum_{i=1}^3 Q_{ii} = \int d^3r' \rho(r') (3(r')^2 - 3(r')^2) = 0$)

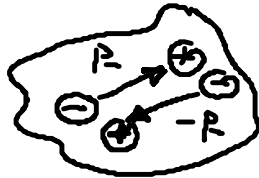
es ex. orthogonale Koord. trafo
 auf Diagonalforn: $Q_{kl} = 0 \quad (k \neq l)$

$$Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0$$

\Rightarrow nur 2 unabh. Komp.

$$\phi^{(2)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2r^5} Q_{kl} x_k x_l = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r \underline{Q} r}{2r^5} \sim \frac{1}{r^3}$$

Beispiel : 2 entgegengerichtete Dipole:



1.5. Elektrostat. Feldenergie

$$\text{Kraft } \underline{F}(\underline{r}) = q \underline{E}(\underline{r}) = -q \nabla \phi(\underline{r})$$

$\Rightarrow V(\underline{r}) = q\phi(\underline{r})$ ist pot. Energie einer Ladung q
 im Feld $\underline{E}(\underline{r})$

$$W_{ij} = q_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{|r_i - r_j|} = W_{ji} \quad \text{pot. Energie}$$

der Ladung q_i bei r_i im Pot. der Ladung q_j bei r_j ,

Gesamte pot. Energie eines Systems von Ladungen $q_1 \dots q_N$:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} W_{ij} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|r_i - r_j|}$$

Kontinuierl. Ladungsverteilung $\rho(r)$,

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(r) \rho(r')}{|r - r'|}$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \int d^3r \phi(r) \rho(r)}$$

$$\rho(r) = \epsilon_0 \nabla \cdot \underline{E} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \phi(r) \nabla \cdot \underline{E}$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int d^3r \nabla \cdot (\phi \underline{E}) - \int d^3r (\nabla \phi) \cdot \underline{E}(r) \right]$$

Gauß

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_{S_\infty} d\underline{f} \cdot (\phi \underline{E}) + \int d^3r \left(\frac{\phi}{r-1} - \frac{\phi}{r-2} \right) \right]$$

0

$$= \int d^3r w(r)$$

Energiedichte des el. Feldes $\boxed{w(r) = \frac{\epsilon_0}{2} (\underline{E}(r))^2}$

Selbstenergie einer Pkt. Ladung

$$|E(r)| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad w(r) = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right)^2 \frac{1}{r^2}$$

$$\text{Gesamtenergie } W = \int dV w(r) = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \underbrace{4\pi \int_0^{\infty} dr r^2 \frac{1}{r^2}}_{\frac{1}{r}(r=0) \rightarrow \infty}$$

Begriff ^{der Pkt. Ladung} ist im Widerspruch

zum feldtheoret. Begriff der Energiedichte!