

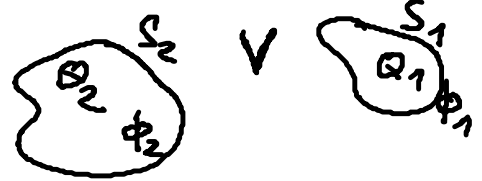
2. Grundaufgabe der Elektrostatik:

geg.: Leiter L_α (Oberfläche S_α), $\alpha = 1, \dots, n$
mit Ladungen Q_α

Raumlad. dichte $\rho(\underline{r})$ in V

gesucht: $\phi(\underline{r})$; ϕ_α

Lösung: Zurückführen auf 1. Grundaufgabe durch Zus.hang zwischen Q_α und ϕ_α :



$$Q_\alpha = \sum_{\beta=1}^n C_{\alpha\beta} \phi_\beta \quad \alpha = 1, \dots, n$$

mit Kapazitätskoeffizienten $C_{\alpha\beta}$

Beweis: $Q_\alpha = -\epsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f} \cdot \underline{\nabla} \phi$

Lösung ϕ
 $= -\epsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f} \cdot \underline{\nabla}_r \int d\underline{r}' G(\underline{r}-\underline{r}') \rho(\underline{r}')$

$$= -\epsilon_0 \oint_{S_\alpha} d\underline{f} \cdot \underline{\nabla}_r \sum_{\beta} \phi_\beta \oint_{S_\beta} d\underline{f}' \cdot \underline{\nabla}_r G(\underline{r}-\underline{r}')$$

$$\begin{aligned}
 &= -\epsilon_0 \int_{L_\alpha} d^3 \int_V d^3 r' \underbrace{\Delta_r G(r-r')}_{-\frac{1}{\epsilon_0} \delta(r-r')} \rho(r') \\
 &= -\sum_{\beta=1}^n \phi_\beta \epsilon_0 \underbrace{\int_{L_\alpha} d^3 \cdot \nabla_r}_{S_\alpha} \underbrace{\int_{L_\beta} d^3 r' \cdot \nabla_{r'} G(r-r')}_{S_\beta} \\
 &=: -C_{\alpha\beta} \\
 &= \sum_{\beta=1}^n C_{\alpha\beta} \phi_\beta
 \end{aligned}$$

Aus der Symm. $G(r-r') = G(r'-r)$ folgt

$$C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$$

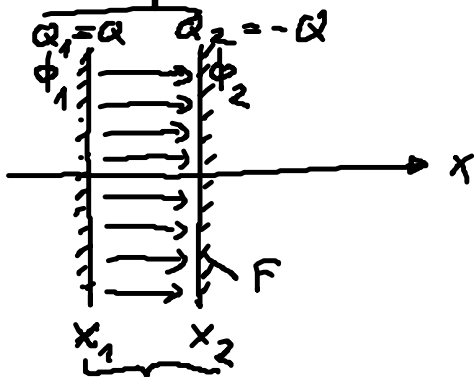
Einheit der Kapazität: $1 \text{ F} = 1 \frac{\text{C}}{\text{V}} = 1 \text{ Farad}$

(M. Faraday 1791-1867)

Betrachte speziell einen einzelnen Leiter mit Pot. ϕ_L :

$$C = \frac{Q}{\phi_L} \quad \text{(Selbst-)Kapazität des Leiters}$$

Beispiel: Plattenkondensator



$$\left. \begin{aligned}
 Q_1 &= C_{11} \phi_1 + C_{12} \phi_2 \\
 Q_2 &= C_{21} \phi_1 + C_{22} \phi_2
 \end{aligned} \right\} C_{12} = C_{21} \equiv C'$$

$$\text{Symm. } 1 \leftrightarrow 2 \Rightarrow C_{11} = C_{22} \equiv C$$

$$\text{Spezialfall } Q_1 + Q_2 = 0$$

$$E\text{-Feld: } \Rightarrow Q = C\phi_1 + C'\phi_2$$

$$\sigma = \frac{Q}{F} = \epsilon_0 E = \text{const. (2)}$$

$$-Q = C'\phi_1 + C\phi_2$$

$$\Rightarrow \phi(x) = -Ex + \phi_0$$

$$0 = (C + C')(\phi_1 + \phi_2) \Rightarrow C = -C'$$

$$\Rightarrow \phi_1 - \phi_2 = E \underbrace{(x_2 - x_1)}_a \quad (3)$$

$$C = -C' = \frac{Q}{\phi_1 - \phi_2} \quad (1)$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow \boxed{C = -C' = \frac{Q}{Ea} = \epsilon_0 \frac{F}{a}}$$

Betrachte Lösung der 2. Grundaufgabe:

Inverse der Kapazitätsmatrix

$$\boxed{\phi_\alpha = \sum_{\beta=1}^n (C^{-1})_{\alpha\beta} Q_\beta}$$

$$+ \sum_{\beta} \frac{1}{C_{\alpha\beta}} Q_\beta$$

eingesetzt in die Lösung der 1. Grundaufgabe liefert $\phi(x)$ für geg. Q_β , $\rho(x)$. \square

Energie des Feldes im Außenraum V (für $\rho(x) = 0$)

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d^3r (\underline{E}(x))^2$$

differenzielle Änderung } $Q_\alpha \rightarrow Q_\alpha + \delta Q_\alpha$
 der Randbed. auf den E_α } $\phi_\alpha \rightarrow \phi_\alpha + \delta\phi_\alpha$

Lösung $\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \delta\phi(x)$

Räuml. Anordnung ungeändert \Rightarrow Vertauschung von ∇ und δ

$$\Rightarrow \delta W = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \underbrace{2 \underline{E}(r) \delta \underline{E}(r)}_{-\nabla \phi}$$

$$= -\epsilon_0 \int d^3r \underbrace{(\nabla \phi(r)) \delta \underline{E}(r)}_{\nabla(\phi \delta \underline{E}) - \phi \nabla \cdot \delta \underline{E}}$$

$$\nabla \cdot \delta \underline{E} = 0 \text{ in } \nabla(\rho=0)$$

$$= -\epsilon_0 \int d^3r \nabla(\phi \delta \underline{E})$$

Gauß
 $\int dV \rightarrow \sum_x \oint_{S_x} d\underline{f}$

$$\epsilon_0 \sum_x \oint_{S_x} d\underline{f} (\phi(r) \delta \underline{E}(r))$$

$\phi(r) \equiv \phi_x$
 $\int dV \rightarrow \sum_x \oint_{S_x} d\underline{f}$

$$\epsilon_0 \sum_x \phi_x \oint_{S_x} d\underline{f} \cdot \delta \underline{E}$$

$$= \sum_x \phi_x \delta Q_x \quad Q_x = \sum_\beta C_{x\beta} \phi_\beta$$

$$= \sum_{\alpha\beta} \phi_\alpha C_{\alpha\beta} \delta \phi_\beta$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} \phi_\alpha \delta \phi_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} C_{\beta\alpha} \phi_\beta \delta \phi_\alpha$$

$$= \delta \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} \phi_\alpha \phi_\beta \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} \phi_\alpha \phi_\beta} \quad \underline{\text{Feldenergie}}$$

2. Stationäre Ströme und Magnetfeld

2.1 Kontinuitätsgleichung

Bewegte Ladungen \rightarrow el. Strom $\underline{I} = \frac{dQ}{dt}$

Experimentelle Erfahrung: Erhaltung der el. Ladung

$$Q(t) = \int_V d^3r \rho(r, t)$$

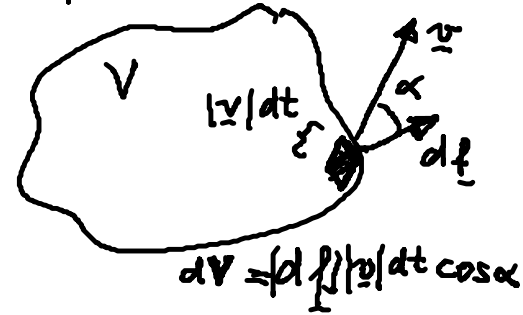
⇒ globaler Erhaltungssatz

$$\frac{dQ}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho(r, t) = - \oint_{\partial V} \delta I$$

$$\delta I = \frac{q dV}{dt} = \frac{\rho |v| dt |d\vec{f}| \cos \alpha}{dt}$$

$$= q \underline{v} \cdot d\vec{f}$$

(Ladung, die durch $d\vec{f}$ pro Zeit aus V herausströmt)



Elektr. Stromdichte $\underline{j}(r, t) := \rho(r, t) \underline{v}(r, t)$ (lokale Größe)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho(r, t) = - \oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \underline{j}(r, t) = - \int_V d^3r \operatorname{div} \underline{j} \quad \text{für bel. } V$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(r, t) + \operatorname{div} \underline{j}(r, t) = 0$$

Kontinuitätsgl.

lokaler Erhaltungssatz

speziell: stationäre Ladungsverteilung $\Rightarrow \operatorname{div} \underline{j} = 0$

(nicht notwendig $\underline{j} = 0$!)

⇒ quellenfreie Stromdichte

* allg. Struktur einer Kontinuitätsgl. (lokaler Erhalt.satz)

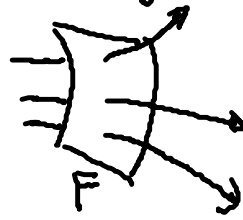
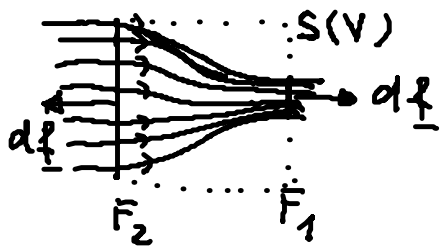
z.B.: Masse, Energie (ohne Dissipation), Impuls,

Wahrscheinlichkeit (QM)

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} \underline{j} = 0, \quad \underline{j} = \rho \underline{v}$$

Betrachte stat. Ladungsverteilung: $\text{div } \underline{j} = 0$

Strom $\underline{I} = \int_{\underline{F}} \underline{j} \, d\underline{f}$

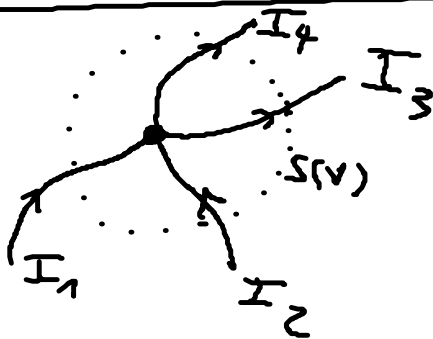


$$0 = \int_V d^3x \, \text{div } \underline{j} = \int_{S(V)} \underline{j} \cdot d\underline{f} = \int_{F_1} \underline{j} \cdot d\underline{f} + \int_{F_2} \underline{j} \cdot d\underline{f}$$

$$= I_1 - I_2$$

$\Rightarrow I_1 = I_2$ Strom konstant

Kirchhoff'sche Knotenregel:



$$0 = \int d^3x \, \text{div } \underline{j} = \int d\underline{f} \cdot \underline{j}$$

$$= -I_1 - I_2 + I_3 + I_4$$

$\sum I_{in} = \sum I_{out}$

Ohm'sches Gesetz

Exp. Erfahrung: $U \sim I$ in Leitern bei nicht zu hohen Spannungen

$U = RI$ mit el. Widerstand R

lokale Form des Ohm'schen Gesetzes:

$\underline{j}(\underline{r}, t) = \sigma \underline{E}(\underline{r}, t)$

el. Leitfähigkeit $\sigma = \text{const.}$

(Drude)

Energiedissipation:

a) El. Arbeit im el. Feld: $dW = \underline{F} \cdot d\underline{s} = q \underline{E} \cdot d\underline{s}$

el. Leistung: $\frac{dW}{dt} = q \underline{E} \cdot \underline{v}$

b) kontin. Ladungsverteil. $\rho(\underline{r})$

El. Leistung an Volumenelement $d\underline{r}$: $dP = \underline{E}(\underline{r}) \cdot \underline{j}(\underline{r}) d\underline{r}$

$$P = \int_V \underline{j}(\underline{r}) \cdot \underline{E}(\underline{r}) d\underline{r}$$

Leistungsdichte

globale Bilanz: in Feld aufgenommene Leistung
= durch Stoßprozesse an das
Kristallgitter dissipierte
Leistung (= Joulesche Wärme)

Ohm: $\underline{E} \cdot \underline{j} = \sigma E^2$

gesamte Verlustleistung: $P = \int \underline{j} \cdot \underline{E} d\underline{r} = IU = RI^2$