Energiebilanz $\boxed{\frac{\partial}{\partial t} w + \underline{\nabla} \cdot \underline{S} = -\underline{j} \cdot \underline{E}}$

$w := \frac{1}{2} (\underline{E} \cdot \underline{D} + \underline{B} \cdot \underline{H})$ Energiedichte

$\underline{S} := \underline{E} \times \underline{H}$ Energiestromdichte

$\sigma = -\underline{j} \cdot \underline{E}$ Leistungsdichte

<u>Beispiel</u> : Beschleunigung von Teilchen durch $\underline{E}$, $\underline{B}$:

Kraft auf die Ladung q : $\underline{F} = q (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$

Kraftdichte : $\underline{f} = \rho (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$

Leistungsdichte der Felder auf Ladungsdichte ρ:

$$\underline{f} \cdot \underline{v} = \rho \underline{v} \underline{E} + \rho \underbrace{\underline{v} (\underline{v} \times \underline{B})}_{0} = \underline{j} \cdot \underline{E}$$

Verlustdichte der Feldenergie (Magnetfeld leistet keine Arbeit, da $\underline{F} \perp \underline{v}$)

$*$ Feldenergie ist keine <u>Erhaltungsgröße</u> !

1. <u>Beispiel</u> : <u>Ohm'sche Gesetz</u> $\underline{j} = \sigma \underline{E}$ mit <u>konst.</u> Leitfähigk. $\sigma > 0$

(phänomenolog. <u>Materialgesetz</u> ! gilt in Metallen u. Halbleitern für hinreichend kleine Felder $\underline{E}$)

$\Rightarrow$ Energiebilanz $\frac{\partial}{\partial t} w + \underline{\nabla} \cdot \underline{S} = - \sigma \underline{E}^2 < 0$

d.h. stets <u>Verlust</u> von Feldenergie

(Konsequenz des 2. Hauptsatzes der Thermodyn.)

E-Dynamik ist zeitumkehrinvariant

$\Updownarrow$

Ohm'sches Gesetz nicht zeitumkehrinvariant

$t \to -t$

$\underline{j} \to -\underline{j}$

$\underline{E} \to \underline{E}$

$\sigma \underline{E}^2$ wird als Joule'sche Wärme im Leiter dissipiert (Irreversibilität)

2. Beispiel: Antennenabstrahlung (offenes System)
$\underline{j}$ in der metallischen Antenne ist dem Wechselfeld $\underline{E}$ außerhalb der Antenne entgegengesetzt $\Rightarrow \underline{j} \cdot \underline{E} < 0$
$\Rightarrow$ Energiegewinn des Feldes

3.5 Impulsbilanz

Aus den Maxwell-Gln. folgt eine weitere Bilanzgl. für den Impulstransport durch das el. magn. Feld:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\underline{D}\times\underline{B}) = \underbrace{\dot{\underline{D}}}_{\nabla\times\underline{H}-\underline{j}}\times\underline{B} + \underline{D}\times\underbrace{\dot{\underline{B}}}_{-\nabla\times\underline{E}}$$

$$= -\frac{1}{\mu_0}\underline{B}\times(\underline{\nabla}\times\underline{B}) - \underline{j}\times\underline{B} - \epsilon_0\underline{E}\times(\underline{\nabla}\times\underline{E})$$

Es gilt die Vektorumformung

$$\underline{B}\times(\underline{\nabla}\times\underline{B}) = \frac{1}{2}\underline{\nabla}(\underline{B}\cdot\underline{B}) - (\underline{B}\cdot\underline{\nabla})\underline{B}$$

$$= \underline{\nabla}\cdot\{\underline{\underline{1}}\,\tfrac{1}{2}(\underline{B}\cdot\underline{B}) - \underline{B}\otimes\underline{B}\} + \underline{B}\underbrace{(\underline{\nabla}\cdot\underline{B})}_{0}$$

wobei $\underline{\underline{1}}$ der Einheitstensor 2. Stufe

$\underline{B}\otimes\underline{B}$ das Tensorprodukt (dyadisches Produkt)

und $\underline{\nabla}\cdot\{\ldots\}$ die Divergenz eines Tensors $\underline{\underline{T}}$ 2. Stufe ist

(In Komponenten $(\underline{B}\otimes\underline{B})_{ij} = B_i B_j$

$$(\underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{T}})_\beta := \partial_\alpha T_{\alpha\beta}$$)

Analog: $\underline{E}\times(\underline{\nabla}\times\underline{E}) = \underline{\nabla}\cdot\left\{\underline{\underline{1}}\,\frac{1}{2}(\underline{E}\cdot\underline{E}) - \underline{E}\otimes\underline{E}\right\} + \underline{E}\,(\underbrace{\underline{\nabla}\cdot\underline{E}}_{\rho/\epsilon_0})$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\underline{D}\times\underline{B}) + \underline{\nabla}\cdot\left\{\underline{\underline{1}}\,\frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) - \epsilon_0\,\underline{E}\otimes\underline{E} - \frac{1}{\mu_0}\underline{B}\otimes\underline{B}\right\}$$

$$= -\underbrace{(\rho\underline{E} + \underline{j}\times\underline{B})}$$

Kraftdichte $\underline{f}$, die von den Feldern auf Ladungsdichte ρ u. Stromdichte $\underline{j}$ ausgeübt wird

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\underline{g} + \underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{T}} = -(\rho\underline{E} + \underline{j}\times\underline{B})}$$ Bilanzgl. für Impulstransport

mit

$\underline{g} := \underline{D}\times\underline{B}$ Impulsdichte des Feldes

(Nach Newton $\frac{d\underline{p}}{dt} = \underline{F} \Rightarrow \frac{d}{dt}\underline{g} = \underline{f}$)

$$\underline{\underline{T}} := \underline{\underline{1}}\,\frac{1}{2}(\underline{E}\cdot\underline{D} + \underline{B}\cdot\underline{H}) - \underline{E}\otimes\underline{D} - \underline{B}\otimes\underline{H}$$

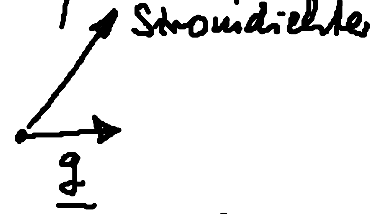
Impulsstromdichte-Tensor des Feldes

(Maxwell'scher Spannungstensor)

in Komponenten:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\left(\underline{E}\cdot\underline{D} + \underline{B}\cdot\underline{H}\right) - E_\alpha D_\beta - B_\alpha H_\beta$$

(Stromdichte in α-Richtung der β-Komponente der Impulsdichte)



$$\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{T}} = T_{\alpha\alpha} = \frac{3}{2}\left(\underline{E}\cdot\underline{D} + \underline{B}\cdot\underline{H}\right) - \left(\underline{E}\cdot\underline{D} + \underline{B}\cdot\underline{H}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underline{E}\cdot\underline{D} + \underline{B}\cdot\underline{H}\right) = w \quad (\underline{\text{Energiedichte}})$$

$\underline{\underline{T}}$ ist <u>symmetrisch</u>: $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} g_\beta + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} T_{\alpha\beta} = -f_\beta}$$

Impuls Impulsaustausch zwischen Feld u. geladenen Teilchen

<u>Bem.</u>: Eine analoge Bilanzgl. gilt für die <u>Drehimpulsdichte</u> des Feldes; sie beschreibt Drehimpulsaustausch zwischen Feld u. geladenen Teilchen.

3.6 Eichinvarianz

Darstellung der Felder $\underline{E}, \underline{B}$ durch $\phi(\underline{r},t)$, $\underline{A}(\underline{r},t)$:

$$\boxed{\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}, \quad \underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A}}$$

<u>Frage</u>: allg. Trafo $\phi \to \phi'$, $\underline{A} \to \underline{A}'$, welche $\underline{E}, \underline{B}$ invariant läßt?

$$\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A} \overset{!}{=} -\underline{\nabla}\phi' - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}'$$

$$\underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A} \overset{!}{=} \underline{\nabla}\times\underline{A}' \qquad \Rightarrow \underline{A}' = \underline{A} + \underline{\nabla}G(\underline{r},t)$$

$$\Rightarrow -\underline{\nabla}\phi - \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\underline{A}} \overset{!}{=} -\underline{\nabla}\phi' - \frac{\partial}{\partial t}(\cancel{\underline{A}} + \underline{\nabla}G) \qquad (\underline{\nabla}\times\underline{\nabla}G \equiv 0)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\nabla}\left(\phi' - \phi + \frac{\partial}{\partial t} G\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \phi' - \phi + \frac{\partial}{\partial t} G = g(t) \quad \text{unabh. v. } \underline{r}$$

Mit $F(\underline{r},t) := G(\underline{r},t) - \int_{t_0}^{t} dt' \, g(t')$,

ergibt sich

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{A}'(\underline{r},t) &= \underline{A}(\underline{r},t) + \underline{\nabla} F(\underline{r},t) \\ \phi'(\underline{r},t) &= \phi(\underline{r},t) - \frac{\partial}{\partial t} F(\underline{r},t) \end{aligned}}$$

mit beliebiger Eichfkt. $F(\underline{r},t)$)

physikal. relevant. $\oint_{\partial F} d\underline{s} \cdot \underline{A} = \int_F d\underline{f} \cdot \underline{B} = \underline{\Phi}$

Durch $\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}$, $\underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A}$ sind die homog. Maxwell-gln. erfüllt

$$\Big(\underline{\nabla} \times \underline{E} = \underbrace{-\underline{\nabla} \times \underline{\nabla}\phi}_{0} - \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\underline{\nabla} \times \underline{A}}_{\underline{B}}, \quad \underline{\nabla} \cdot \underline{B} = \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{A}) \equiv 0 \Big)$$

Umkehrung:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \underline{A} : \underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A}$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\underline{B} = -\underline{\nabla} \times \frac{\partial}{\partial t}\underline{A} \Rightarrow \underline{\nabla} \times \left(\underline{E} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}\right) = 0 \Rightarrow \exists \phi : \underline{E} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{A} = -\underline{\nabla}\phi$$

Wähle nun Eichung, so dass die inhomogenen Maxwell-gln. besonders einfach werden:

Ziel: Entkopplung der Gln. für $\underline{A}$ und ϕ

(i) Lorenz-Eichung (Ludwig V. Lorenz, dän. Physiker) 1867

↕ Hendrik A. Lorentz

$$\boxed{\underline{\nabla} \cdot \underline{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \phi = 0}$$

Hiermit werden die Feldgln. entkoppelt

a) $-\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = \underline{\nabla}\left(\underline{\nabla}\phi + \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}\right) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$

$$\Delta\phi + \frac{\partial}{\partial t}\underline{\nabla}\cdot\underline{A} = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

Lorenz-Eichung:

$$\boxed{\Delta\phi - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho}$$

b) $$\frac{1}{\mu_0}\underline{\nabla}\times\underline{B} - \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\underline{E} = \underline{j}$$

$$\underbrace{\underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}\times\underline{A})}_{\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{A}) - \Delta\underline{A}} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\underline{\nabla}\phi + \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}\right) = \mu_0\underline{j}$$

$$\Delta\underline{A} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{A} - \underline{\nabla}\underbrace{\left(\underline{\nabla}\cdot\underline{A} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\phi\right)}_{0 \text{ Lorenz}} = -\mu_0\underline{j}$$

$$\boxed{\Delta\underline{A} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{A} = -\mu_0\underline{j}}$$

Zus.fassung mit d'Alembert-Op. $\Box := \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

$$\boxed{\begin{aligned}\Box\phi &= -\frac{1}{\epsilon_0}\rho \\ \Box\underline{A} &= -\mu_0\underline{j}\end{aligned}}$$

inhomogene Wellengln.
(entkoppelt!)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = 2.994\times 10^8 \ \frac{m}{s}$$ Lichtgeschwindigkeit

(= Ausbreitungsgeschw. el. magn. Wellen im Vakuum)