

Hertz'scher Dipol

$$\underline{A}^{(1)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\underline{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad \text{el. Dipolstrahl.}$$

Poynting-Vektor (Energiedichte):
(Fernzone)

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{E} \times \underline{H} = -\frac{1}{\mu_0} \underline{B} \times \underline{E} = -\frac{c}{\mu_0 r} \underline{B} \times (\underline{B} \times \underline{r}) \\ &= -\frac{c}{\mu_0 r} \left\{ \underbrace{(\underline{B} \cdot \underline{r}) \underline{B}}_0 - B^2 \underline{r} \right\} \quad \text{!} \\ &= \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \frac{1}{r^4} \underbrace{\left(\dot{\underline{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \underline{r} \right)^2}_{|\dot{\underline{p}}|^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\underline{r}}{r} \end{aligned}$$

$$\underline{S} = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} |\dot{\underline{p}}|^2 \frac{1}{r^2} \sin^2 \vartheta \frac{\underline{r}}{r}$$



Abstrahlcharakteristik des Hertz'schen Dipols
stark richtungsabhängig!

$$\underline{p}(t) = \underline{p}_0 e^{-i\omega t} \quad : \quad |\dot{\underline{p}}|^2 = p_0^2 \omega^4 \quad \text{stark frequenzabh.}$$

gute Näherung für eine lineare Antenne \rightarrow

40

Magn. Dipol- u. Quadrupolstrahlung

Die niedrigste Ordnung des Multipolents.
von $\underline{A}(\underline{r}, t)$ verschwindet für quellenfreie
Stromdichte $\underline{j}(\underline{r}', \tau)$:

$$\nabla_{r'} \cdot \underline{j}(\underline{r}', \tau) = -\frac{\partial \rho(\underline{r}', \tau)}{\partial \tau} = 0 \Rightarrow \dot{\underline{p}}(\tau) = \int d^3r' \underline{j} = 0$$

$$\Rightarrow A^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\underline{p}}(\tau) = 0 \quad \text{in el. Dipolnäherung}$$

keine Abstrahlung!

Beispiel: geschlossene Leiterschleife (Rahmenantenne)  $I(t) = I_0 e^{-i\omega t}$

2. Ordnung

$$\underline{A}^{(2)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int d^3r' (\underline{r} \cdot \underline{r}') (1 + \frac{r}{c} \frac{\partial}{\partial \tau}) \underline{j}(\underline{r}', \tau)$$

$$\text{Mit } (\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{j}(\underline{r}', \tau) = \frac{1}{2} (\underline{r}' \times \underline{j}) \times \underline{r} + \frac{1}{2} [(\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{j} + (\underline{r} \cdot \underline{j}) \underline{r}']$$

$$\text{und } \nabla_{r'} \cdot \{x'_k (\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{j}\} = [(\underline{r} \cdot \underline{r}') j_k + x'_k (\underline{r} \cdot \underline{j})] + x'_k (\underline{r} \cdot \underline{r}') \nabla_{r'} \cdot \underline{j}$$

zw. integriert

$$\int_{\mathbb{R}^3} dt' \nabla_{r'} \cdot \{ \underline{r}' (r r')_j \} = \int_{\mathbb{R}^3} dt' [(r r')_j + (r_j r)] - \int_{\mathbb{R}^3} dt' (r r') \underline{r}' \cdot \underline{e}'$$

0 (gauge),

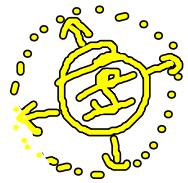
folgt:

$$\int_{\mathbb{R}^3} dt' (r r')_j (r', \tau) = \underbrace{\left[\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} dt' (r' \times j(r', \tau)) \right]}_{\underline{m}(\tau) \text{ magn. Dipolmoment}} \times \underline{r} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} dt' (r r') r'_j$$

El. Quadrupolmoment - Tensor:

$$\underline{\underline{Q}}(\tau) = \int_{\mathbb{R}^3} dt' \rho(r', \tau) (3 r' \otimes r' - r'^2 \underline{1}) =: \underline{\underline{Q}} - \frac{1}{3} (S_p \underline{\underline{Q}}) \underline{1}$$

falls $\underline{\underline{Q}}(\tau) \text{ osz.} \therefore$ „breathing mode“
 \Rightarrow kein Beitrag zu $\underline{E}, \underline{B}$



$$\Rightarrow \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{r} = 3 \int_{\mathbb{R}^3} dt' \rho(r', \tau) \underline{r}' (r' \cdot \underline{r})$$

$$\Rightarrow \underline{A}^{(2)}(\underline{r}, \tau) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left(1 + \frac{r}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left[\underline{m}(\tau) \times \underline{r} + \frac{1}{6r^3} \underline{\underline{Q}}(\tau) \cdot \underline{r} \right]$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \underbrace{\frac{1}{r^3} \underline{\dot{m}} \times \underline{r} + \frac{1}{cr^2} \dot{\underline{m}} \times \underline{r}}_{\text{magn. Dipolstrahlung}} + \underbrace{\frac{1}{6r^3} \dot{\underline{Q}} \cdot \underline{r} + \frac{1}{6cr^2} \ddot{\underline{Q}} \cdot \underline{r}}_{\text{el. Quadrupolstrahlung}} \right\}$$

$$A_m^{(2)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\nabla \times \frac{1}{r} \underline{m}(t - \frac{r}{c}) \right] \quad \text{magn. Dipolstrahlung}$$

Skalares Pot. aus Lorenz-Eichung

$$\frac{\partial^2 \phi(\underline{r}, t)}{\partial t^2} = -c^2 \nabla \cdot \underline{A}(\underline{r}, t) = -\frac{\mu_0 c^2}{4\pi} \nabla \cdot (\nabla \times \frac{1}{r} \underline{m}) = 0$$

$$\Rightarrow \phi(\underline{r}, t) = \phi(\underline{r}) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{da } \underline{A} \perp \underline{r}$$

Felder in Fernfeldnäherung:

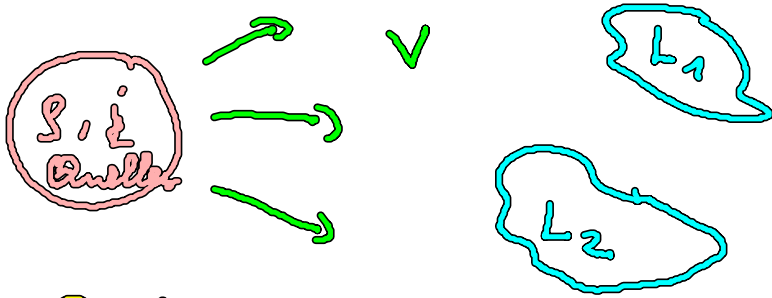
$$\underline{B}_m(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c^2 r^3} \left[\ddot{\underline{m}}(t - \frac{r}{c}) \times \underline{r} \right] \times \underline{r} \quad (r \gg \lambda \gg a)$$

$$\underline{B}_{elQ}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c^2 r^3} \left[\frac{1}{6} \ddot{\underline{Q}}(t - \frac{r}{c}) \cdot \underline{r} \right] \times \underline{r}$$

$$\underline{E} = c(\underline{B} \times \frac{\underline{r}}{r}) \quad \text{wie für el. Dipolstrahlung}$$

4.4 Wellenoptik und Beugung

Problem: Ausbreitung elektromagnetischer Wellen bei
 geg. lokalisierten Quellen $\rho(\underline{r}, t)$ und $\underline{j}(\underline{r}, t)$ und vorgegebener Leitern L_α im
 Vakuum.



Ziel : Berechnung des Wellenfeldes im Außenraum

Anwendung : Radiowellen ($\lambda \sim 1 - 10^4 \text{ m}$)
Radar

Optik ($\lambda \sim 400 - 800 \text{ nm}$) \rightarrow Beugung

Zwischführung auf Randwertaufgabe

Lösung der inhomogenen Wellengl.

$$\left. \begin{aligned} \square \phi &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \square \underline{A} &= -\mu_0 \underline{j} \end{aligned} \right\} \text{Lorenzgleichung}$$

zu vorgeg. $\rho(\underline{r}, t)$ u. $\underline{j}(\underline{r}, t)$ und Randbed.
auf L_1 sowie Kausalitätsbed. (Ausstrahlbed.).

$$\left. \begin{aligned} \underline{Annahme} : \rho(\underline{r}, t) &= \rho(\underline{r}) e^{-i\omega t} \\ \underline{j}(\underline{r}, t) &= \underline{j}(\underline{r}) e^{-i\omega t} \end{aligned} \right\} \text{o.BdA wegen} \\ \text{Fourierzerlegung} \\ \text{(period. Erregung)}$$

$$\Rightarrow \phi(\underline{r}, t) = \phi(\underline{r}) e^{-i\omega t}$$

$$\underline{A}(\underline{r}, t) = \underline{A}(\underline{r}) e^{-i\omega t}$$

eingesetzt in die Wellengl. $(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$

$$\boxed{(\Delta + k^2) \phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\underline{r})} \quad \text{mit} \quad \boxed{k := \frac{\omega}{c}}$$

Green'sche Fkt. der Wellengl. (§4.2) $\square\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$:

$$\square G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t')$$

$$\begin{aligned} \text{allg. L\u00f6s. } \phi(\mathbf{r}, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \int_{-\infty}^t dt' G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') \rho(\mathbf{r}', t') / \epsilon_0 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \underbrace{\int_{-\infty}^t dt' G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') e^{-i\omega t'}}_{\left(\int_0^{\infty} d\tau G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', \tau) e^{i\omega\tau} \right) e^{-i\omega t}} \rho(\mathbf{r}') / \epsilon_0 \\ &=: \tilde{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \end{aligned}$$

period. Zeitabh\u00e4ngigkeit abseparieren:

$$\phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \tilde{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') / \epsilon_0$$

mit $(\Delta + k^2) \tilde{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$