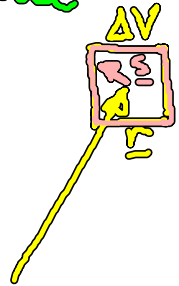


Polarisation \equiv makroskop. el. Dipoldichte

$$P(\underline{r}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3s \underline{P}_m(\underline{r}+\underline{s}, t)$$



Analog:

mikroskop. Dipoldichte $\underline{P}_m(\underline{r}, t) = \sum_i \underline{p}_i(t) \delta(\underline{r} - \underline{r}_i)$

mikroskop. Pot. der el. Dipole \underline{p}_i



$$\phi_m(\underline{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla_n \left\{ \sum_i \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}_i|} p_i(t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}_i|}{c}) \right\}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \nabla_n \left\{ \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \underline{P}_m(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}) \right\}$$

makroskop. gemitteltel. el. Dipol pot.:

$$\phi(\underline{r}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3s \phi_m(\underline{r}+\underline{s}, t)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3s \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \nabla_n \left\{ \frac{\underline{P}_m(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}+\underline{s} - \underline{r}'|}{c})}{|\underline{r}+\underline{s} - \underline{r}'|} \right\}$$

$$\stackrel{\underline{r}'' = \underline{r}' - \underline{s}}{=} -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r'' \nabla_n \left\{ \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}''|} \underline{P}(\underline{r}'', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}''|}{c}) \right\}$$

makroskop. Dipoldichte

Umformung:

$$\nabla_{\mathbf{r}} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \underline{P}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}) \right\} = - \nabla_{\mathbf{r}} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \underline{P}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}) \right\} + \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \nabla_{\mathbf{r}} \underline{P}(\mathbf{r}', t') \Big|_{t' = t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}}$$

$$\Rightarrow \phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \nabla_{\mathbf{r}} \{ \dots \}}_{=0 \text{ (Gauß)}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \underbrace{[-\nabla_{\mathbf{r}} \underline{P}(\mathbf{r}', t')]}_{\underline{P}_p(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})} \Big|_{t' = t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}}$$

\otimes ist das mikroscop. Pot. einer Ladungsdichte ρ_p \otimes

$$\rho_p(\mathbf{r}, t) = -\nabla_{\mathbf{r}} \underline{P}(\mathbf{r}, t)$$

Polarisation $\underline{P} := -\epsilon_0 \underline{E}_p$

5.2 Magnetisierung

Mikroscop. Ursache für den Magnetismus der Materie sind mikroscop. magnet. Dipolmomente \underline{m} :

(a) Für $\underline{B} = 0$ vorhandene persm. magn. Momente \underline{m} werden zur Minimierung der pot. Energie

$$W_{\text{magn}} = - \underline{m} \cdot \underline{B}$$

Vorzugsweise (gegen die Therm. Bewegung) $\uparrow \uparrow \underline{B}$
orientiert (z.B. Bahn- u. Spinmomente von El.)
 \rightarrow paramagn. Verhalten

(b) Durch \underline{B} können nach dem Faraday'schen Induktionsgesetz Wirbelströme induziert werden.

Lenz'sche Regel \Rightarrow Magnetisierung $\uparrow \uparrow \underline{B}$

\rightarrow diamagnet. Verhalten

makroskop. gemittelte Felder

mikroskop. magn. Dipoldichte $\underline{M}_m(\underline{r}, t) = \sum \underline{m}_i(t) \delta(\underline{r} - \underline{r}_i)$

Mittelung über kleines unskala. Vol. ΔV :

$$\underline{M}(\underline{r}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3s \underline{M}_m(\underline{r} + \underline{s}, t)$$

Magnetisierung = makroskop. magn. Dipoldichte

Ziel: Zus. hang zwischen \underline{M} und den effektiven Feldern \underline{B} in der Materie.

Zeige, dass eine Magnetisierungsstromdichte \underline{j}_M als Ursache des Feldes eingeführt werden kann.

$$\nabla \times \underline{B}_M = \mu_0 \underline{j}_M \quad \text{bzw.} \quad \nabla \times \underline{M} = \underline{j}_M$$

eff. Gesamtinduktion (stat. Fall)

$$\underline{B}' = \underline{B} + \underline{B}_M \Rightarrow \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \underline{B}' \right) = \underbrace{\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \underline{B} \right)}_{\underline{j}} + \underline{j}_M$$

Erzeugung durch freie Ströme:

$$\boxed{\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \underline{B}' - \underline{M} \right) = \underline{j}}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu_0} (\underline{B}' - \underline{B}_M) = \frac{\underline{B}}{\mu_0}$$

Betrachte Vektorpot. der mikroskop. el. u. magn. Dipole (§ 4.3)

$$\begin{aligned} \underline{A}_m(\underline{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \left\{ \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}_i|} \dot{\underline{p}}_i \left(t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}_i|}{c} \right) + \nabla \times \left(\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}_i|} \underline{m}_i \left(t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}_i|}{c} \right) \right) \right\} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \left\{ \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \dot{\underline{P}}_m(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}) + \nabla_{r'} \times \left(\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \underline{M}_m(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}) \right) \right\} \end{aligned}$$

el. Dipolmomente
magn. Dipolmomente

mikr. el. Dipoldichte
magn. Dipoldichte

mikroskop. gemittelter Pot.:

$$\begin{aligned} \underline{A}(\underline{r}, t) &= \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d^3s \underline{A}_m(\underline{r} + \underline{s}, t) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \left\{ \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \dot{\underline{P}}(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}) + \nabla_{r'} \times \left(\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \underline{M}(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}) \right) \right\} \end{aligned}$$

makrosk. Dipoldichten

Umformung

$$\int d^3r' \nabla_r \times \left\{ \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \underline{M}(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}) \right\} = - \int d^3r' \nabla_r \times \{ \dots \} + \int d^3r' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} [\nabla_r \times \underline{M}(\underline{r}', t)]_{t' = t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c} =: t^{\text{ret}}}$$

Def.: Magnetisierungsstromdichte

Polarisationsstromdichte

$$\underline{j}_M := \nabla \times \underline{M}$$

$$\underline{j}_P := \frac{\partial \underline{P}}{\partial t}$$

$$\underline{A}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \{ \underline{j}_P(\underline{r}', t^{\text{ret}}) + \underline{j}_M(\underline{r}', t^{\text{ret}}) \}$$

erzeugt durch Polarisations- u. Magnetisierungsstromdichte

Erhaltungssatz:

$$\frac{\partial \rho_P}{\partial t} = -\nabla \cdot \underline{j}_P = -\nabla \cdot \underline{j}_M$$

$$\rho_P + \text{div } \underline{j}_P = 0$$

Erhaltung der Polarisationsladung

5.3. Maxwell-Gleichungen in Materie

Vollständige Pot. enthalten

- freie Ladungen- u. Stromdichten ρ, \underline{j}
- Polarisations- u. Magnetisierungsbeiträge $\rho_P, \underline{j}_P, \underline{j}_M$

$$\underline{A}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \{ \underline{j}(\underline{r}', t^{\text{ret}}) + \underline{j}_P(\underline{r}', t^{\text{ret}}) + \underline{j}_M(\underline{r}', t^{\text{ret}}) \}$$

$$\phi(\underline{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \{ \rho(\underline{r}', t^{\text{ret}}) + \rho_P(\underline{r}', t^{\text{ret}}) \}$$

\underline{A}, ϕ sind also Lösungen des inhom. Wellengl.

$$\left. \begin{aligned} \square \underline{A}(z, t) &= -\mu_0 (\underline{j} + \underline{j}_p + \underline{j}_M) \\ \square \phi(z, t) &= -\frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho_p) \end{aligned} \right\} \text{Lorenz-Eichung}$$

Für die Felder $\underline{E}, \underline{B}$ in Materie folgt

$$\underline{E} := -\frac{\partial}{\partial t} \underline{A} - \nabla \phi$$

$$\underline{B} := \nabla \times \underline{A}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} (1) \quad \nabla \times \underline{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \underline{B} \\ (2) \quad \nabla \cdot \underline{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{wie im Vakuum}$$