Polarisierbarkeit $\quad \underline{p} = \epsilon_0 \alpha \underline{E}_a$

mikrosk. el. Dipol $\quad$ Lokalfeld

Polarisation $\quad \underline{P} = n\underline{p} = \epsilon_0 n \alpha \underline{E}_a$ (mikr.)

(n mittlere Atomdichte)

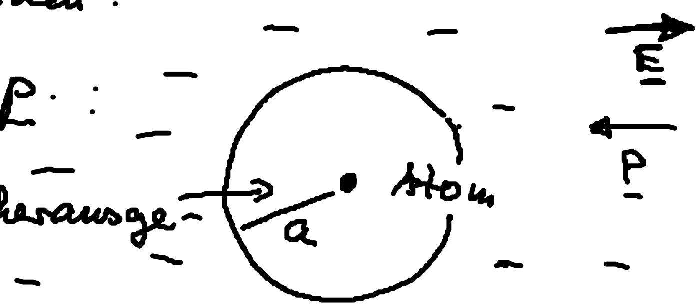
Selbstkonsistente Berechnung des Lokalfeldes $\underline{E}_a$

Ziel: makrosk. Feld $\underline{E} \longleftrightarrow$ Lokalfeld $\underline{E}_a$

berücksichtige Felder, die durch die anderen el. Dipole erzeugt werden!

Gedankenexp.:

diel. Kugel herausgeschnitten



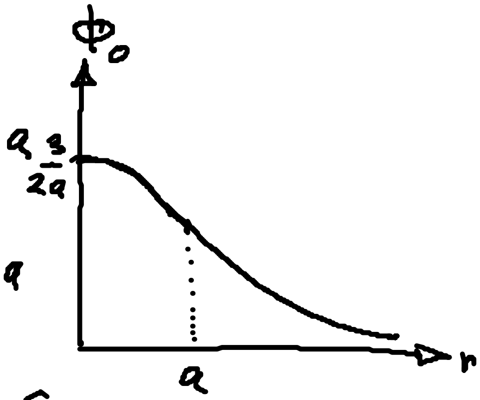
polarisierbares Dielektrikum

Feld einer homogen polarisierten Kugel:

a) homogen geladene Kugel

$$\underline{E}_0(\underline{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\begin{cases}\dfrac{\underline{r}}{a^3} & r \leq a \\[2ex] \dfrac{\underline{r}}{r^3} & r \geq a\end{cases}$$

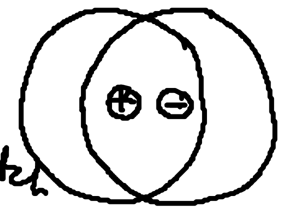
$$\Rightarrow \quad \phi_0(\underline{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\begin{cases} c - \dfrac{r^2}{2a^3} & r \leq a \\[2ex] \dfrac{1}{r} & r \geq a\end{cases}$$



Bestimmung der Integrat. konst. c:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \phi_0(a-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0}\phi_0(a+\varepsilon) \Rightarrow c = \frac{3}{2a}$$

b) <u>homogen polarisierte Kugel</u>:



Überlagerung von 2 entgegengesetzt homogen geladenen Kugeln mit Abstand $\underline{r}_0$, $r_0 \to 0$:

$$\phi(\underline{r}) = \phi_0\left(\underline{r} - \tfrac{1}{2}\underline{r}_0\right) - \phi_0\left(\underline{r} + \tfrac{1}{2}\underline{r}_0\right)$$

Taylor

$$\approx -\underline{r}_0 \underbrace{\underline{\nabla}\phi_0(\underline{r})}_{-\underline{E}_0} = \underline{r}_0 \underline{E}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\begin{cases}\dfrac{Q\,\underline{r}_0\cdot\underline{r}}{a^3} & r \leq a \\[2ex] \dfrac{Q\,\underline{r}_0\cdot\underline{r}}{r^3} & r \geq a\end{cases}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\begin{cases}\dfrac{\underline{p}\cdot\underline{r}}{a^3} & r \leq a \\[2ex] \dfrac{\underline{p}\cdot\underline{r}}{r^3} & r \geq a\end{cases}$$

mit $\underline{p} = Q\,\underline{r}_0$
(el. Dipolmoment der herausgeschnittenen Kugel)

Mit der Polarisation $\underline{P} = \frac{\underline{p}}{\frac{4\pi}{3} a^3}$ läßt sich schreiben

$$\phi(\underline{r}) = \begin{cases} \frac{1}{3\epsilon_0} \underline{P} \cdot \underline{r} & r \le a \quad \text{homog. polarisiert} \\ \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{r^3} \underline{P} \cdot \underline{r} & r \ge a \quad \text{Dipolpotenzial} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{E}_{Kugel} = -\underline{\nabla}\phi = -\frac{1}{3\epsilon_0}\underline{P}} \quad (r \le a)$$

Innenfeld der homog. polarisierten Kugel

gesamtes Lokalfeld am Ort des Atoms

$$\underline{E}_a = \underline{E}^{außen} + \underbrace{\underline{E}^{innen}}_{\text{durch Atome innerhalb der Hohlkugel erzeugt}} = 0 \quad (\text{für kub. Symm.})$$

Lokalfeld $\underline{E}_0$ im Innern des Kugelhohlraums, der aus dem Diel. herausgeschnitten wurde:

$$\underbrace{\underline{E}_a}_{\text{Lokalfeld am Ort des Atoms}} + \underbrace{\underline{E}_{Kugel}}_{\text{Innenfeld der diel. Kugel (wieder in den Hohlraum eingesetzt)}} = \underbrace{\underline{E}}_{\text{mittleres makroskop. Feld}}$$

$$\Rightarrow \underline{E}_a(\underline{r}) = \underline{E} - \underline{E}_{Kugel}$$

$$\boxed{\underbrace{\underline{E}_a}_{\text{Lokal-feld}} = \underbrace{\underline{E}}_{\text{makr. Feld}} + \underbrace{\frac{1}{3\epsilon_0}\underline{P}}_{\text{Korrekturfeld (Lorentz)}}} \quad \text{Lorentz-Lorenz}$$

Zus.hang zwischen $\underline{P}$ und makroskop. Feld $\underline{E}$:

$$\underline{P} = \epsilon_0 n\alpha \underline{E}_a = \epsilon_0 n\alpha \left(\underline{E} + \frac{1}{3\epsilon_0}\underline{P}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\underline{P} = \epsilon_0 \chi_e \underline{E}} \quad \text{mit} \quad \boxed{\chi_e = \frac{n\alpha}{1-\frac{1}{3}n\alpha}}$$

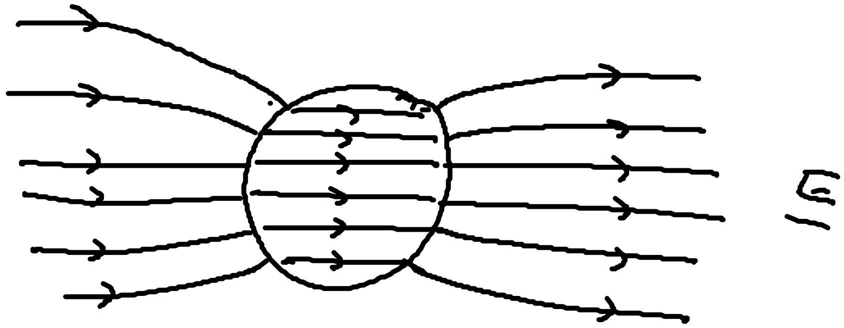
$$\chi_e\left(1-\tfrac{1}{3}n\alpha\right) = n\alpha$$

$$\chi_e = n\alpha\left(1+\frac{\chi_e}{3}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{n\alpha = \frac{\chi_e}{1+\frac{1}{3}\chi_e} = \frac{\varepsilon-1}{1+\frac{\varepsilon-1}{3}} = 3\,\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}}$$

Formel von Clausius-Mosotti

Feld einer polaris. Kugel im homog. Feld $\underline{E}$



5.6 Wellenausbreitung in Materie

Ann.: homogene, isotrope, lineare Medien
mit skalaren Materialpar. ϵ, μ, σ Leitfähigkeit

$\underline{D} = \epsilon_0 \epsilon \underline{E}$ $(\epsilon > 1)$

$\underline{B} = \mu_0 \mu \underline{H}$ (i.a. $\mu \approx 1$)

$\underline{j} = \sigma \underline{E}$ (Ohm'sches Gesetz)

a) <u>Wellen in leitenden Medien ohne Dispersion</u>

(d.h. ϵ, μ, σ unabh. v. ω)

Sei $\rho = 0$

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} + \underline{\dot{B}} = 0 \qquad \underline{\nabla} \cdot \underline{E} = 0$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{B} - \mu_0 \mu \epsilon_0 \epsilon \underline{\dot{E}} = \mu_0 \mu \underline{j} = \mu_0 \mu \sigma \underline{E} \qquad \underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{E}) = \underline{\nabla} \underbrace{(\underline{\nabla} \cdot \underline{E})}_{0} - \Delta \underline{E} = - \underline{\nabla} \times \underline{\dot{B}}$$

$$= -\mu_0 \mu \epsilon_0 \epsilon \underline{\ddot{E}} - \mu_0 \mu \sigma \underline{\dot{E}}$$

$$\boxed{\Delta \underline{E} - \frac{1}{c_M^2} \left(\underline{\ddot{E}} + \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} \underline{\dot{E}} \right) = 0}$$

gedämpfte Wellengl. mit $c_M := \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu \epsilon_0 \epsilon}} = \dfrac{c}{\sqrt{\mu \epsilon}}$

(1-dim.: <u>Telegraphengl.</u>, beschreibt Drahtwellenausbreitung)

<u>Harmon. ebene Welle</u> (spezielle Lösung)

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = \underline{E}_0 \, e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$$

$$\Rightarrow \boxed{k^2 = \epsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{1}{\omega \tau} \right)} \quad \text{(Dispersions-Relat.)}$$

$\tau := \dfrac{\epsilon_0 \epsilon}{\sigma}$ <u>dielektr. Relaxationszeit</u>

$\Rightarrow$ Wellenvektor $k \in \mathbb{C}$ (wegen Dämpfung)

Setze $\boxed{k = \frac{\omega}{c} \tilde{n} = \frac{\omega}{c} (n + i\gamma)}$

c Vakuumlichtgeschw.

$\tilde{n} = n + i\gamma$ komplexer Brechungsindex

$$\Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (n^2 - \gamma^2 + 2in\gamma) \overset{!}{=} \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu \left(1 + \frac{i}{\omega \tau} \right)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} n^2-\gamma^2 &= \epsilon\mu \\ n\gamma &= \frac{\epsilon\mu}{2\omega\tau} \end{aligned}\right\} n, \gamma$$

oBdA: $\underline{k} \parallel x_3$: $\underline{E}(x_3, t) = \underline{E}_0 \underbrace{e^{-\frac{x_3}{d}}} e^{-i\omega(t-\frac{n}{c}x_3)}$

<u>gedämpfte Welle</u> mit <u>Phasengeschw.</u> $\frac{c}{n}$

u. <u>Extinktionskoeff</u> $d := \frac{c}{\omega\gamma}$

Lineare Polarisation: $\underline{E}_0 \parallel x_1 \Rightarrow \underline{B}_0 \parallel x_2$

$$(\underline{\nabla} \times \underline{E})_2 = \frac{\partial E_1}{\partial x_3} = -\dot{B}_2$$

$$\Rightarrow i\frac{\omega}{c}(n+i\underline{\gamma})E_1 = i\omega B_2$$

$$\Leftrightarrow B_2 = \frac{n+i\gamma}{c}E_1 = \frac{\sqrt{n^2+\gamma^2}}{c}e^{i\varphi}E_1$$

Phasenverschiebung φ zwischen $\underline{E}$ u. $\underline{B}$