

Wellenausbreitung in Materie :

$$\Delta \underline{E} - \frac{1}{c_M^2} (\ddot{\underline{E}} + \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} \dot{\underline{E}}) = 0$$

$$c_M = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

$\tau = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{\sigma}$ diel. Relax.zeit

$$\underline{E} \sim e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$$

$$k^2 = \epsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{1}{\omega \tau} \right)$$

Disp.-Rel.

$$k = \frac{\omega}{c} \tilde{n} = \frac{\omega}{c} (n + i\gamma)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Re} : n^2 - \gamma^2 = \epsilon \mu \\ \text{Im} : n\gamma = \frac{\epsilon \mu}{2\omega \tau} \end{array} \right\} \Rightarrow n, \gamma$$

lin. Polaris $\underline{E}_0 \parallel x_1 \Rightarrow \underline{B}_0 \parallel x_2 \Rightarrow \tan \varphi = \frac{\gamma}{n}$

Isolator ($\sigma = 0$) : $\tau \rightarrow \infty$

$\Rightarrow \gamma = 0$, $\varphi = 0$
(ungedämpft) $\underline{E}, \underline{B}$
in Phase

reeller Brechungsindex

$$n = \sqrt{\epsilon \mu} \approx \sqrt{\epsilon} > 1$$

\Rightarrow Phasengeschw.

$$\frac{c}{n} < c$$

Metall (σ groß) : $\kappa = \frac{\epsilon_0 \sigma}{\omega} \ll \frac{1}{\omega}$ (für alle Frequ. bis UV)

Disp. rel. $\Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (n^2 - \gamma^2 + 2i n \gamma) \approx \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_1 \frac{i}{\omega \tau}$

$\Rightarrow n^2 - \gamma^2 \approx 0$

$n \gamma \approx n^2 \approx \gamma^2 \approx \frac{\epsilon_1}{2\omega \tau} \Rightarrow \boxed{n = \gamma \approx \sqrt{\frac{\epsilon_1}{2\omega \tau}}}$
 $\tan \varphi = \frac{\gamma}{n} \approx 1 \Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{\pi}{4}}$

Extinktionskoeff. $d = \frac{c}{\omega \gamma} \sim \text{cm}$ für 100 Hz

(hochfrequente Wellen dringen nicht in Metall ein - Skin-Effekt)

Grund: Verschiebungsstrom \ll Leitungsstrom

b) Dielektrische Dispersion (Ann. $\mu = 1$)

Betrachte nun zeitliche Dispersion, d.h. $\hat{\chi}(\omega)$:

$\boxed{\underline{\hat{P}}(\omega) = \epsilon_0 \hat{\chi}(\omega) \underline{\hat{E}}(\omega)}$

mit $\hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \chi(t) e^{i\omega t}$ (dynam. el. Suszept.)

Fourier-Transform: $\underline{P}(r,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \underline{\hat{P}}(r,\omega) e^{-i\omega t}$

$\underline{\hat{E}}(r,\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \underline{E}(r,t) e^{i\omega t}$

$\rightarrow \underline{P}(r,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \epsilon_0 \hat{\chi}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega(t'-t)} \underline{E}(r,t')$

$= \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t dt' \chi(t-t') \underline{E}(r,t')$

(Nachwirkungseffekt: Faltungsintegral)

NB: Kausalität verlangt $\boxed{\chi(t-t') = 0 \text{ für } t' > t}$

Aus mikroskop. Modellen folgt i.a. ein komplexes $\hat{\chi}(\omega) \in \mathbb{C}$
 \Rightarrow komplexe dielektr. Funktion :

$$\epsilon(\omega) = 1 + \hat{\chi}(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega) \quad \text{mit } \epsilon', \epsilon'' \in \mathbb{R}$$

aus $\epsilon(\omega) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt \chi(t) e^{i\omega t}$ folgt

$$\boxed{\epsilon^*(\omega) = \epsilon(-\omega)} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \epsilon'(\omega) &= \epsilon'(-\omega) \\ \epsilon''(\omega) &= -\epsilon''(-\omega) \end{aligned}$$

monochromat. ebene Welle $\underline{E}(r, t) = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$

$$\Rightarrow \boxed{k^2 = \epsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{1}{\omega\tau}\right)}$$

Isolator (dispersives Dielektrikum) : $k^2 \approx \epsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}$

$\tilde{n}(\omega) = n(\omega) + i\gamma(\omega)$ komplexer, frequenzabh. Brech. index

mit $\tilde{n}(\omega)^2 = \epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \epsilon'(\omega) &= n^2 - \gamma^2 \\ \epsilon''(\omega) &= 2n\gamma \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \gamma &= \\ n &= \end{aligned} \right\} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} \mp \epsilon' \right)^{1/2}$$

Abs.koeff. γ
 reeller Brech.index n

(i) Absorption

a) $\epsilon'' = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Abs.koeff. } \gamma = 0 \\ \text{Brech.ind. } n = \sqrt{\epsilon'} \end{array} \right\}$ falls $\epsilon' > 0 \Rightarrow$ ungedämpfte Welle

b) $\epsilon'' > 0 \Rightarrow \gamma > 0$ (gedämpfte Welle) \Rightarrow Energie-dissipation

Der Frequenzbereich mit $\epsilon'' \ll \epsilon'$ heißt Transparenzgebiet der Substanz (wenig Absorption)

(ii) Dispersion

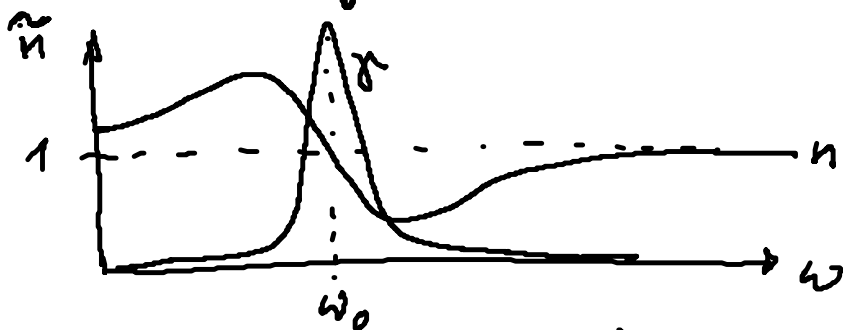
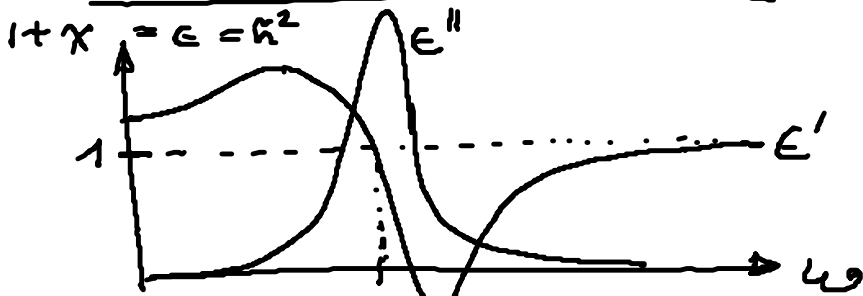
$$\operatorname{Re} k \equiv k' = \frac{\omega}{c} n(\omega) \quad \text{nichtlin. Dispersion}$$

$$\Rightarrow \text{Gruppengeschw. } v_g := \frac{d\omega}{dk'} = \frac{1}{\frac{dk'}{d\omega}} = \frac{c}{\frac{d(\omega n)}{d\omega}}$$

$$v_g = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} \neq \frac{c}{n(\omega)} = v_{ph}$$

Typ. Frequenzabhängigkeit (Resonanzverh.)

Phasengeschw.



normale Dispersion: $\frac{dn}{d\omega} > 0$ (stets im Transparenzgebiet)

$$\epsilon'' \approx 0, \quad v_g < v_{ph}$$

anomale Dispersion: $\frac{dn}{d\omega} < 0$ (bei Absorption)

Ref.: Louis de Broglie: Wave propagation

Beziehungen zwischen $\epsilon'(\omega)$ und $\epsilon''(\omega)$:

(Kramers - Kronig - Relationen)

- Allg. gültiger Zus.hang zwischen Dispersion ($n(\omega)$) und Absorption ($\chi(\omega)$) erlaubt z.B. Berechnung der Dispersionsbez. aus dem Absorptionsspektrum und umgekehrt!
- Folgt aus dem Kausalitätsprinzip!

Beweis (Methode Funktionentheorie)

Für eine kausale Fkt. $\chi(t)$ gilt:

$$\chi(t) = \theta(t) \chi(t) \quad \text{mit} \quad \theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

Heaviside-Fkt.

Fourier-Transform:

$$\hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \hat{\theta}(\omega - \omega') \hat{\chi}(\omega')$$

$$\hat{\theta}(\omega) := \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t - \sigma t}$$

(konvergenzerzeugender Faktor $e^{-\sigma t}$)

$$= \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\omega - \sigma}$$

$$\Rightarrow \hat{\chi}(\omega) = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{1}{\omega' - \omega - i\sigma} \hat{\chi}(\omega')$$