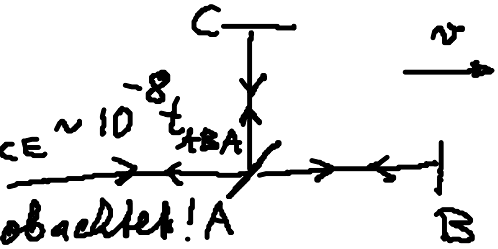
6. Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

6.1 Lorentz-Transformation in der Speziellen Relat.theorie

Michelson-Morley-Experiment (1887):

Prüfung der Äther-Hypothese
(Erde bewegt sich mit Geschw. $\underline{v}$ relativ zu einem „Medium", in dem sich das Licht mit „c" relativ zum Medium ausbreitet)

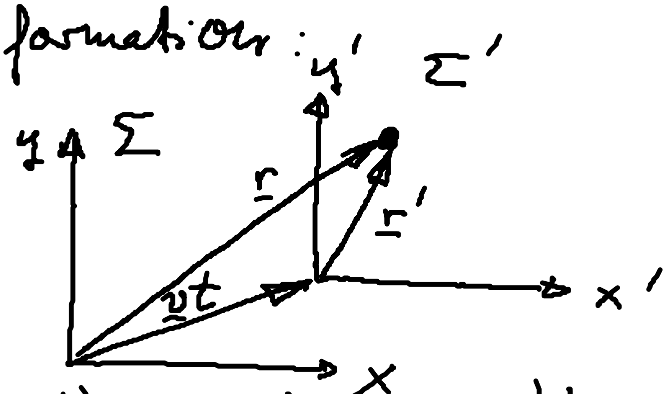


$t_{ABA} - t_{ACE} \sim 10^{-8}\, t_{ABA}$

nicht beobachtet!

Erg. $\boxed{\text{Licht breitet sich in jedem Inertialsystem mit der gleichen Geschwindigkeit aus.}}$

Galilei-Transformation:



Lichtblitz breite sich vom Ursprung von Σ mit der Geschw. c aus: $r = ct$

in Σ': $\underline{r}(t) = \underline{r}' + \underline{v}t$

$$c^2t^2 = r^2 = (\underline{r}' + \underline{v}t)^2 = r'^2 + 2\underline{r}'\cdot\underline{v}t + v^2t^2$$

$$r'^2 = (c^2 - v^2)t^2 - 2\underline{r}'\underline{v}t \neq c^2 t^2 \quad \text{für } v \neq 0$$

↯ zum Michelson-Morley-Exp.!

$\Rightarrow$ Konzept der <u>absoluten Zeit</u> $\longrightarrow$ spez. Rel. theorie

NB: Aufgabe des Konzeptes des abs. Raumes
$\longrightarrow$ allg. Rel. th.

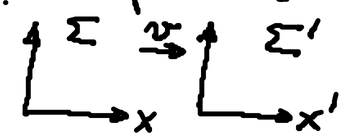
<u>Postulat der speziellen Relativitätstheorie:</u>
(Einstein 1905) „Zur Elektrodynamik bewegter Körper"

Kein Inertialsystem ist gegenüber einem anderen ausgezeichnet (<u>Relativitätsprinzip</u>)

<u>Konsequenz</u>: Galilei-Trafo verwerfen!

- Klass. Mechanik ist abzuändern, da sie Galilei-invariant ist
- El. dynamik hat schon die gewünschte Invarianz (Lorentz-invariant)

<u>Aufgabe</u>: Suche eine Trafo $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ die folgende Forderungen erfüllt:



(i) <u>lineare</u> Trafo $(\underline{r}, t) \rightarrow (\underline{r}', t')$

(ii) Jeder Pkt. $\underline{r}'(t') = \text{const}$ (ruhend in Σ') bewegt sich mit $\underline{v}$ in Σ
Jeder Pkt. $\underline{r}(t) = \text{const}$ (ruhend in Σ) bewegt sich mit $-\underline{v}$ in Σ'

(iii) Die Lichtgeschw. c ist in beiden Systemen <u>gleich</u>

(iv) Keines der beiden Systeme sei vor dem anderen ausgezeichnet.

$$\underline{r} \longrightarrow \underline{r}' = \underline{f}(\underline{r}, t; \underline{v})$$

$$t \longrightarrow t' = g(\underline{r}, t; \underline{v})$$

Umkehrtrafo:

$$\underline{r}' \longrightarrow \underline{r} = \underline{f}(\underline{r}', t'; -\underline{v})$$

$$t' \longrightarrow t = g(\underline{r}', t'; -\underline{v})$$

<u>OBdA</u> : $\underline{v}$ in x-Richtung

- $(x=0, t=0) \Longrightarrow (x'=0, t'=0)$
- $y = y'$, $z = z'$
- O' bewegt sich nach $x = vt$

Ansatz: $x \longrightarrow x' = \gamma(x - vt)$ (1) wegen (ii), (i)

$x' \longrightarrow x = \gamma(x' + vt')$ (2) wegen (iv)

Invarianz der Lichtgeschw. (iii) :

$x = ct \longrightarrow x' = ct'$

in (1) : $ct \to ct' = \gamma(c - v)t$

in (2) : $ct = \gamma(c+v)t'$

$\Longrightarrow c^2tt' = \gamma^2 tt'(c^2 - v^2)$

$\Longrightarrow \gamma = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $\beta := \dfrac{v}{c}$

Für $v = 0$: $\gamma \overset{!}{=} 1$

$$\Longrightarrow \boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

Also $\quad x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\quad x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$

elim. x

$$\Longrightarrow \underline{x'\sqrt{1-\beta^2}} = x - vt = \underline{\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} - vt}$$

$$vt = \sqrt{1-\beta^2}\left(-x' + \frac{x'+vt'}{1-\beta^2}\right)$$

$$= \sqrt{1-\beta^2}\left(\frac{\cancel{-x'} + x'\beta^2 + \cancel{x'} + vt'}{1-\beta^2}\right)$$

$$= \frac{x'\beta^2 + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t = \frac{t' + x'\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

analog $\quad t' = \dfrac{t - x\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$

<u>Erg.</u>: Lorentz-Trafo

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - x\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

Zeit wird mittransformiert! Keine abs. Zeit!

Forderung $\quad 1 - \dfrac{v^2}{c^2} \geq 0$, sonst imaginäre, d.h. unphys. Werte

$$\Longrightarrow \boxed{|\underline{v}| \leq c}$$

Entwicklung für $|\underline{v}| \ll c$:

$$\beta \ll 1 \implies \gamma \to 1 \implies \boxed{\begin{aligned} x' &= x - vt \\ t' &= t \end{aligned}} \quad \text{Galilei-Trafo}$$

Nichtrelativist. Mechanik gültig

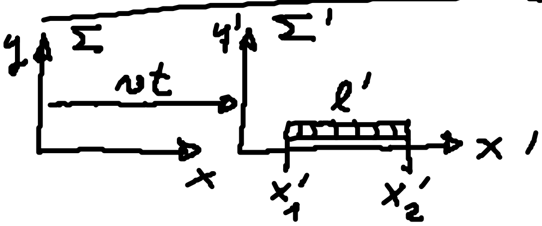
Eigenschaften der Lorentz-Trafo

a) Lorentz-Invariante

$$\begin{aligned}
\underline{r}'^2 - c^2t'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 \\
&= \gamma^2\left(x^2 - \cancel{2xvt} + v^2t^2\right) + y^2 + z^2 \\
&\quad - \gamma^2c^2\left(t^2 - \cancel{\frac{2xvt}{c^2}} + \frac{x^2v^2}{c^4}\right) \\
&= \frac{x^2 + v^2t^2}{1-\beta^2} - \frac{c^2t^2 + x^2\beta^2}{1-\beta^2} + y^2 + z^2 \\
&= \frac{(x^2 - c^2t^2)\cancel{(1-\beta^2)}}{\cancel{1-\beta^2}} \\
&= \underline{r}^2 - c^2t^2
\end{aligned}$$

d.h. Kugelwellen mit Ausbreitungsgeschw. c (Lichtblitz in $O = O'$) sind invariant

b) Lorentz-Kontraktion



Länge in Σ': $l' = x_2' - x_1'$ (Ruhelänge)

Länge in Σ:
$$\begin{aligned} l &= x_2 - x_1 \\ &= \frac{1}{\gamma}(x_2' - x_1') = \frac{1}{\gamma} l' \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\, l' \\ &< l' \end{aligned}$$

z.B. $v/c = 0{,}75 \implies \gamma \approx 1.5$
$1/\gamma \approx 2/3$

Spektrum der Wiss., Juli 2005
Hanns Ruder (Tübingen): Einsteins Holodeck
$\longrightarrow$ Visualisierungen