Lorentz-Trafo : $\Sigma \to \Sigma'$

$$\boxed{x'^{\mu} = U^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}}$$

kontravariant $x^{\nu} \in V$

kovariant $x_{\nu} \in \tilde{V}$ dualer Raum zu V

$$U^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\tilde{V} = \{$ lin. Funktionale $l : V \to \mathbb{R} \}$

$$ds^2 = dx_{\mu}\, dx^{\mu} = \underbrace{dx^{\nu} g_{\nu\mu}}_{dx_{\mu}}\, dx^{\mu} \qquad g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{„Heben oder Senken der Indizes" durch } g^{\mu\nu} \text{ bzw. } g_{\mu\nu}:}$

Mit $a_{\mu} = g_{\mu\nu} a^{\nu}$ gilt auch

$$a^{\mu} = g^{\mu\nu} a_{\nu} \qquad (g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu})$$

$$\begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$$

Invarianz des Skalarprodukts

$$\left.\begin{aligned} x'^{\mu} &= U^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} \\ x'_{\mu} &= U_{\mu}{}^{\lambda}\, x_{\lambda} \end{aligned}\right\} \quad x'^{\mu} x'_{\mu} = U^{\mu}{}_{\nu}\, U_{\mu}{}^{\lambda}\, x^{\nu} x_{\lambda} \overset{!}{=} x^{\nu} x_{\nu}$$

$$U^{\mu}{}_{\nu}\, U_{\mu}{}^{\lambda} = (U^T)_{\nu}{}^{\mu}\, U_{\mu}{}^{\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

transponierte Matrix: Zeilen u. Spalten vertauscht

$$U^T U = \mathbb{1}$$

$$U^T = U^{-1}$$

U ist orthogonal

Also ist $U_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & & \\ \beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

die inverse Lorentz-Trafo zu $U^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & & \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$\beta \longrightarrow -\beta$

Relativist. Additionstheorem der Geschwindigkeiten:

$\beta = \frac{v_1}{c}$, $\alpha = \frac{v_2}{c}$ $\Rightarrow$ $\beta_{res} = \frac{v_{res}}{c} \overset{!}{=} \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}$

nichtrelativist. Grenzfall ($\alpha, \beta \ll 1$): $\gamma = \alpha + \beta$ (Galilei)

hochrelativist. Grenzfall ($\alpha = 1$): $\gamma = \frac{1+\beta}{1+\beta} = 1$

Die Lorentz-Trafo $U(\beta)$ zur Geschw. $v = \beta c$ bilden eine Gruppe (Lorentz-Gruppe) mit der Verknüpfung

$$U(\alpha) \cdot U(\beta) = U\left(\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}\right) \qquad \text{(Add. theorem)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x^\mu &= U_\nu{}^\mu x'^\nu \\ x_\mu &= U^\nu{}_\mu x'_\nu \end{aligned}}$$

Gruppenaxiome:

(i) Assoziativgesetz $U(\beta_1)\big(U(\beta_2)U(\beta_3)\big) = \big(U(\beta_1)U(\beta_2)\big)U(\beta_3)$

(ii) Es ex. ein Einselement $U(0) = 1$

(iii) Zu jedem $U(\beta)$ ex. eine Inverse $U(\beta)^{-1} = U(-\beta)$

6.3 Relativistische Mechanik

Newton'sche Mechanik ist nicht Lorentz-invariant.

Jetzt: Lorentz-invariante Formulierung mit Hilfe von Vierervektoren u. Skalaren (= Invarianten)

Grenzfall $v \ll c$ soll klass. Mechanik ergeben.

Nichtrelativist. Bahn $\underline{r} = \underline{r}(t)$

Vierervektor $x^\mu(\underset{\sim}{t})$: Parametrisierung der Weltlinie (ct, x, y, z) durch t ungeeignet, da sich t bei Lorentz-Trafo ändert.

<u>Def.</u> : <u>Eigenzeit τ</u> = Zeit im momentanen Ruhesyst. (vom Teilchen mitgeführte Uhr)

$\Longrightarrow x^\mu(\tau)$

Bogenlänge der Weltlinie:

$$ds = (dx^\mu dx_\mu)^{1/2} = (c^2 dt^2 - (d\underline{r})^2)^{1/2}$$

$$= c\left[1 - \left(\frac{1}{c}\frac{d\underline{r}}{dt}\right)^2\right]^{1/2} dt$$

$$= c\,(1-\beta^2)^{1/2} dt \qquad \beta = \frac{v}{c} = \frac{1}{c}\left|\frac{d\underline{r}}{dt}\right|$$

$$= c\,\frac{dt}{\gamma}$$

$$= c\, d\tau$$

Lorentz-Trafo für $dx = 0$

$d\tau = dt' = \frac{dt}{\gamma}$ (momentanes Ruhesystem)

$$\boxed{\tau = \frac{s}{c}}$$

<u>Def.</u>: <u>Vierergeschwindigkeit</u> $\boxed{u^\mu := \frac{dx^\mu}{ds}} = \frac{1}{c}\frac{dx^\mu}{d\tau}$

dimensionslos!

$$u^\mu u_\mu = \frac{dx^\mu dx_\mu}{(ds)^2} = \frac{(ds)^2}{(ds)^2} = 1$$

Lorentz-invariant (da Skalar), Einheitsvektor

Komponenten von $u^\mu = \frac{\gamma}{c}\frac{dx^\mu}{dt}$:

$$\boxed{\begin{aligned} u^0 &= \gamma \\ u^i &= \frac{\gamma}{c} v^i = \frac{1}{c}\frac{dx^i}{d\tau} \end{aligned}} \quad i = 1, 2, 3$$

$\left.\begin{aligned} &\rightarrow 1 \\ &\rightarrow \frac{1}{c} v^i \end{aligned}\right\}$ nichtrelativist. Grenzfall $\beta \ll 1$: v^i Teilchengeschw.

Def.: Viererimpuls $\boxed{p^\mu := m_0 c\, u^\mu} = m_0 \frac{dx^\mu}{d\tau}$

mit Ruhemasse m_0

$$p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2 \underbrace{u^\mu u_\mu}_{1} = m_0^2 c^2 \quad \text{Lorentz-invariant}$$

$$\boxed{\begin{aligned} p^0 &= \frac{m_0 c}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = m(v)\, c = p_0 \\ p^i &= \frac{m_0 v^i}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = m(v)\, v^i = -p_i \end{aligned}} \xrightarrow{\beta \ll 1} m_0 v^i \quad \left(\text{nichtrelat. Impuls}\right)$$

mit geschw.abh. Masse $\boxed{m(v) := \frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}} \xrightarrow{v \to c} \infty$

Es gilt

$$(*) \quad \boxed{\frac{p^i}{p^0} = \frac{u^i}{u^0} = \frac{\frac{\gamma}{c} v^i}{\gamma} = \frac{v^i}{c}}$$

Zus.hang Viererimpuls – Vierergeschw. – Teilchengeschw.

Physikal. Bedeut. von p^0

Verallg. des Newton'schen Grundgesetzes

$$\underline{F} = \frac{d}{dt}\underline{p} \qquad \text{nicht Lorentz-invar.!}$$

auf relativist. Invariante:

Def. Viererkraft (Minkowski-Kraft)

$$\boxed{f^\mu := \frac{d}{d\tau} p^\mu} = m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = m_0 c \frac{du^\mu}{d\tau}$$

Leistungsbilanz

$$u^\mu u_\mu = 1 \Rightarrow \frac{d}{d\tau}(u^\mu u_\mu) = 2 \frac{du^\mu}{d\tau} u_\mu = 0$$

$$\Rightarrow f^\mu u_\mu \overset{!}{=} 0 \quad (*)$$

$$\Rightarrow \gamma \frac{d}{d\tau} p^0 + \frac{\gamma}{c} \sum_{i=1}^{3} f^i v_i = \frac{\gamma}{c}\Big[\underbrace{\frac{d}{d\tau}(cp^0)}_{E} - \underbrace{\underline{f}\cdot\underline{v}}\Big] \overset{(*)}{=} 0$$

Änderung der Energie E $\overset{!}{=}$ Leistung

Def.: relativist. Energie

$$\boxed{E := cp^0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = m(v) c^2} \quad \text{Energie}$$

somit $\boxed{p^0 = \frac{E}{c}}$ $\longrightarrow$ Energie

und $f^0 = \frac{1}{c} \underline{f}\cdot\underline{v}$ Leistung mit $\underline{f} = (f^1, f^2, f^3)$